

# DIGITAALINEN KUVANKÄSITTELY

## OSA 1

Raimo K. Jokinen  
Turun Ammattikorkeakoulu  
Tekniikka ja Teollisuus





# DIGITAALINEN KUVANKÄSITTELY

## OSA 1

### DIGITAALISEN KUVANKÄSITTELYN PERUSTEET

© 2000 Raimo Jokinen

Kaikki oikeudet pidätetään. Tämän teoksen osittainenkin lainaaminen kopioimalla, tallentamalla sähköisesti tai jollakin muulla tavoin tai lähettäminen radioteitse tai kaapelia pitkin on kielletty ilman tekijänoikeuden haltijalta etukäteen saatua kirjallista lupaa.

Julkaistu Suomessa

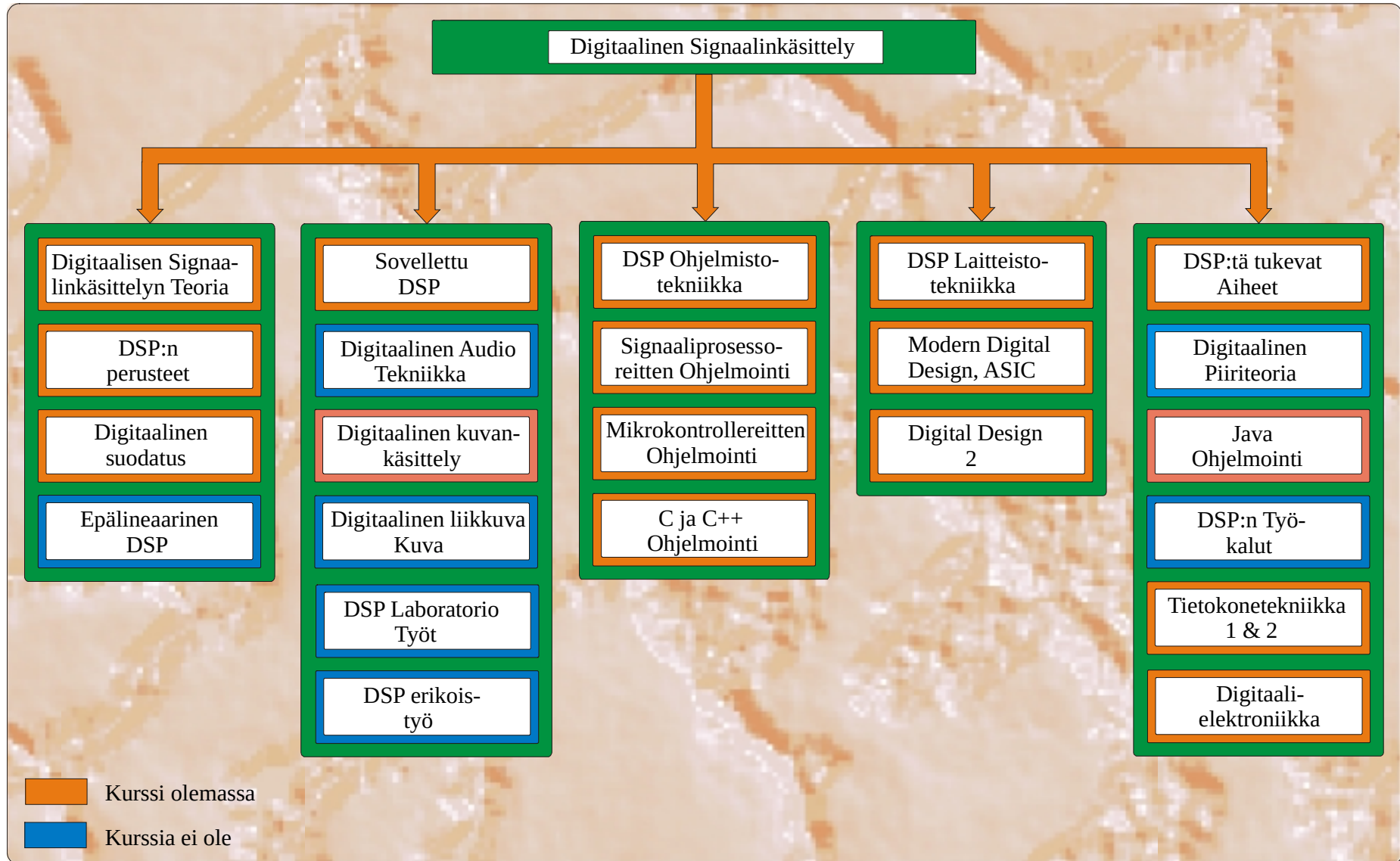
# Esipuhe

Tämä lineaarisen digitaalisen kuvankäsittelyn teoriaa tarkasteleva esitys on syntynyt lyhyen opetuskokemuksen jälkeen käytännöllisesti suuntautuneiden tekniikan korkeakouluopiskelijoiden parissa. Digitaalisen kuvankäsittelyn kenttä on ollut jatkuvan voimakkaan kehityksen alaisena. Viimeisten vuosien aikana kiinnostus kuvaan on kasvanut aivan uusilla sovellutusalueilla, joita ovat mm. kuvan käyttö henkilökohtaisissa matkaviestimissä. Myös uusia menetelmiä käsitellä kuvaa on otettu käyttöön. Samoin kiinnostuksen taso kuvankäsittelyyn on kasvanut kovan morfologian (muoto-oppi), neuraaliverkkojen, täysvärικuvien, kuvien kompression, kuvan tunnistuksen ja tietoperäisen kuvan analyysin alueilla.

Digitaalisen kuvankäsittelyn sovellutusalueita on erittäin laaja koukko, joka kasvaa nopeasti laitteistojen suorituskyvyn lisääntyessä. Edellä oli jo puhe matkaviestimistä, joihin on lisätty kuvankäsittelyominaisuuksia. Muita sovellutusalueita ovat digitaaliset valokuvat ja näihin liittyen lehtitalojen digitaaliset kuva-arkistot ja sairaaloiden röntgenkuva-arkistot. Oman sovellutuskohteensa muodosta digitaalinen liikkuva kuva. Uusia tulevaisuuden sovellutuksia tulevat olemaan turvallisuustekniikkaan liittyvät hahmon ja ihmisen tunnistukset.

Tämänhetkisten digitaalisen kuvankäsittelyn oppikirjojen sisältö perusasioiden kohdalla on hyvin pitkälle standardoitunut. Tämä esitys perustuukin Rafael C. Gonzalesin ja Richard E. Woodsin kirjaa Digital Image Processing vähäisin poikkeuksin. Monissa Digitaalisen signaalinkäsittelyn oppikirjoissa on mukana ohjelmistopaketti, tai ohjelmalistauksia, joilla voidaan laskea monia digitaalisessa signaalinkäsittelyssä esiintyviä tehtäviä. Näin ei kuitenkaan ole asianlaita kuvankäsittelyn kohdalla. Kaupallisesti on kuitenkin saatavissa ohjelmia, joilla voidaan suorittaa kurssin vaatimat käytännön kuvankäsittelyharjoitukset. Tässä kurssissa tullaan käyttämään kahta kuvankäsittelyn ohjelmaa. Ensimmäinen on Corelin kehittämä Photopaint ja toinen on Matlab nimisen matematiikkaohjelman kuvankäsittelyn toolbox. Jälkimmäisestä ohjelmistosta, Matlab, on muodostunut digitaalisen signaalinkäsittelyn alueella defcto standardi.

Digitaalinen kuvankäsittely kuuluu opintojaksona kokonaisuuteen nimeltä Digitaalinen signaalinkäsittely sen soveltavaan osaan. Opiskelijoilta edellytetään suoritetuksi digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteet joko suomen- tai englanninkielisenä. Tällöin voidaan jättää joitakin perusasioita aikaisemmin opitun tiedon varaan. Tällaisia alueita ovat esimerkiksi perus näytteenotto, jolloin keskitytään kuvankäsittelyn tuomiin lisävaatimuksiin. Digitaalisen signaalinkäsittelyn kokonaisuus opintojaksoihin jaettuna on kuvassa jo.1. Kuvaa jo.1 on muokattu jonkin verran verrattuna Digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteiden opintojaksoon nähden. Alaotsikko Tuotteistus on poistettu ja osat DSP ohjelmistotekniikka ja DSP laitteistotekniikka ovat suoraan pääotsikon Digitaalinen signaalinkäsittely alla tasavertaisena muiden osa-alueiden kanssa.



Tässä esityksessä digitaalinen still-kuvien käsittely on jaettu kahteen osaan, Digitaalisen kuvankäsittelyn perusteet ja Hahmon tunnistus. Opintojakso käsittää kuvaan liittyvät peruskäsitteet ja perusoperaatiot. Ehkä merkittävin poisjäävä aihealue on kuvanpakkaustekniikat.

## KUVANKÄSITTELYN PERUSTEIDEN SISÄLTÖ

Tässä esityksessä Kuvankäsittelyn perusteet on jaettu kuuteen aihealueeseen, jotka käsittelevät jotakin kuvaan liittyvää perusteellista. Luvut yhdestä kolmeen käsittelevät kuvaa ja sen taustaa. Luvut neljä ja viisi käsittelevät kuvien esiprosessointia ja luku kuusi kuvan analysointia. Lukujen sisällöt ovat pääpiirteissään seuraavat.

- ◆ *Johdanto digitaaliseen kuvankäsittelyyn*  
esittelee digitaalisen kuvankäsittelyn kentän antaen lyhyen kuvauksen termeistä ja sovellettavista tekniikoista. Samoin kuvataan lyhyesti digitaalisen kuvankäsittelyn prosessi.
- ◆ *Digitaalisen kuvan perusteet*  
keskustelee kuvan visuaalisen havainnoinnin perusteista, kuvan resoluutiosta, pikselien perus geometrisista suhteista ja kuvan geometrian teoreettisista perusteista.
- ◆ *Kuvamuunnokset*  
määrittelee joitakin kuvankäsittelyssä käytettyjä muunnoksia. Suurimman huomion saa Fourier-muunnos ja sen ominaisuuksien esittely. Myös joidenkin muiden muunnosten perusteet käsitellään.
- ◆ *Kuvan visuaalinen parantaminen*  
käsittelee kuvan visuaalisen luettavuuden parantamiseen soveltuvia algoritmeja. Käsiteltäviä aiheita ovat kohinan vaimennus, kontrastin muunnokset, kuvan terävöittäminen ja värien käsittely.
- ◆ *Kuvan korjaaminen*  
luvussa tarkastellaan menetelmiä, joilla häiriöllisistä kuvista voidaan etsiä informaatio tai palauttaa kuva alkuperäiseen asuunsa. Kuvan laatua heikentäviä tekijöitä voivat olla interferenssikuviot tai kuvattaessa tapahtunut kameran liikkuminen.

Hahmontunnistuksen aihealueita ovat kuvan kompressiomenetelmät, kuvan esitystavat ja kuvaus, kuvan tunnistus ja tulkinta sekä kamera ja näyttötekniikat.

**LYHENTEET****Lyhenne****Alkuperä****Suomalainen vastine**

|        |                                               |                                                       |
|--------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| AC     | Alternating current                           | vaihtovirta                                           |
| ACF    | Autocorrelation function                      | autokorrelaatiofunktio                                |
| A/D    | Analog to digital conversion                  | analogia digitaali-muunnos                            |
| A-D    | Analog to digital conversion                  | analogia digitaali-muunnos                            |
| ADPCMA | daptive differential pulse code modulation    | adaptiivinen differentiaalinen pulssikoodi modulaatio |
| AGC    | Automatic gain control                        | automaattinen vahvistuksen säätö                      |
| ALU    | Arithmetic logic unit                         | aritmeettis looginen yksikkö                          |
| AM     | Amplitude modulation                          | amplitudimodulaatio                                   |
| AR     | Autoregressive                                | autoregressiivinen                                    |
| ASP    | Address register                              | osoiterekisteri                                       |
|        | Analog signal processing                      | analoginen signaalinkäsittely                         |
| BLMS   | Block least mean squares                      | lohkottainen pienin keskimääräinen neliö              |
| BP     | Bandpass                                      | kaistanpäästä                                         |
| BPF    | Bandpass filter                               | kaistanpäästösuodatin                                 |
| BS     | Bandstop                                      | kaistan esto                                          |
| CD     | Compact disc                                  | digitaalinen äänilevy                                 |
| CDMA   | Code division multiple acces                  | koodijako                                             |
| CELP   | Codebook of exited linear prediction          | lineaarisen ennustuksen koodikirja                    |
| CMOS   | Complementary metal oxide silicon             |                                                       |
| COFDM  | Coded orthogonal frequency division multiplex | koodattu ortogonaalinen taajuusjakomultipleksointi    |
| CPU    | Central processing unit                       | keskus prosessointiyksikkö                            |
| D/A    | Digital to analog conversion                  | digitjaali analogia-muunnos                           |
| D-A    | Digital to analog conversion                  | digitaali analogia-muunnos                            |
| DC     | Direct current                                | tasavirta                                             |
| DCT    | Discrete cosine transform                     | diskreetti kosini-muunnos                             |
| DFS    | Discrete Fourier series                       | diskreetti Fourier-sarja                              |
| DFT    | Discrete Fourier transform                    | diskreetti Fourier-muunnos                            |
| DIF    | Decimation in frequency                       | taajuustason desimointi                               |
| DIT    | Decimation in time                            | aikatason desimointi                                  |
| DM     | Delta modulation                              | deltamodulaatio (eromodulaatio)                       |
| DMA    | Dynamic memory allocation                     | dynaaminen muistin varaus                             |
| DPCM   | Differential pulse code modulation            | differentiaalinen pulssikoodimodulaatio               |
| DPSK   | Differential phase shift keying               | differentiaalinen vaihesiirto modulaatio              |
| DR     | Data register                                 | datarekisteri                                         |
| DSB    | Double sideband                               | kaksisivunauha                                        |
| DSP    | Digital signal processing                     | digitaalinen signaalinkäsittely                       |
| DTFT   | Discrete time Fourier transform               | diskreetti Fourier-muunnos                            |
| ESD    | Energy spectral density                       | energiatiheysspektri                                  |
| EVR    | Eigenvalue ratio                              | ominaisarvosuhde                                      |
| FFT    | Fast Fourier transform                        | nopea Fourier-muunnos                                 |
| FIR    | Finite impulse response                       | äärellinen impulssivaste                              |
| FM     | Frequency modulation                          | taajuusmodulaatio                                     |
| FS     | Fourier series                                | Fourier-sarja                                         |
| FSK    | Frequency shift keying                        | taajuussiirtomodulaatio                               |
| FT     | Fourier transform                             | Fourier-muunnos                                       |

| Lyhenne | Alkuperä                                             | Suomalainen vastine                   |
|---------|------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| HP      | Highpass                                             | ylipäästö                             |
| I       | Imaginary component                                  | imaginäärikomponentti                 |
| IBR     | Instruction buffer register                          | käskybufferi                          |
| IDFT    | Inverse discrete Fourier transform                   | käänteinen diskreetti Fourier-muunnos |
| IF      | Intermediate frequency                               | välitaajuus                           |
| IIR     | Infinite impulse response                            | ääretön impulssivaste                 |
| IR      | Instruction register                                 | käskyrekisteri                        |
| ISI     | Intersymbol interference                             | keskinäissymboli interferenssi        |
| KCL     | Kirchhoff's laws                                     | Kirchhoffin laki                      |
| LMS     | Least mean squares                                   | pienin keskimääräinen neliö           |
| LO      | Local oscillator                                     | paikallisoskillaattori                |
| LOS     | Line of sight                                        |                                       |
| LP      | Lowpass                                              | alipäästö                             |
| LPC     | Linear predictive coding                             | lineaarinen ennustava koodaus         |
| LS      | Least squares                                        | pienin neliö                          |
| LTI     | Linear time invariant                                | lineaarinen aikainvariantti           |
| M       | Memory                                               | muisti                                |
| MA      | Moving average                                       | liukuva keskiarvo                     |
| MAC     | Multiply and accumulate                              | kertominen ja summaaminen             |
| MATLAB  | MATrix LABoratory DSP software product               | matematiikkaohjelma                   |
| MFSK    | Multiple frequency shift keying                      |                                       |
| MMSE    | Minimum mean square error                            | pienin keskimääräinen neliövirhe      |
| MODEM   | Modulator/demodulator                                |                                       |
| MOS     | Mean opinion score<br>(for speech quality assesment) |                                       |
| MQ      | Metal oxide silicon (transistor)                     |                                       |
| MP      | Multiplier quotient register                         |                                       |
| MPE     | Multipulse excitation                                | moninkertainen heräte                 |
| MSE     | Mean square error                                    | keskimääräinen neliövirhe             |
| MSI     | Medium scale integrated                              |                                       |
| NPSD    | Noise power spectral density                         | kohinan tehotiheys spektri            |
| OP      | Operation code                                       | operaatiokoodi                        |
| PAM     | Pulse amplitude modulation                           | pulssiamplitudimodulaatio             |
| PC      | Program counter                                      | ohjelmalaskuri                        |
| PCM     | Pulse code modulation                                | pulssikoodimodulaatio                 |
| pdf     | probability density function                         | todennäköisyystiheys funktio          |
| PFE     | Partial fraction expansion                           | osamurtolukuihin jako                 |
| PLL     | Phase locked loop                                    | vaihelukittu silmukka                 |
| PM      | Phase modulation                                     | vaihemodulaatio                       |
| PN      | Pseudo noise                                         | näennäissatunnainen kohina            |
| PO      | Percentage overshoot                                 |                                       |
| PPM     | Pulse position modulation                            | pulssin paikkamodulaatio              |
| PR      | Perfect reconstruction                               | täydellinen rekonstruktio             |
| PSD     | Power spectral density                               | tehotiheys spektri                    |
| PSK     | Phase shift keying                                   |                                       |
| PWM     | Pulse width modulation                               | pussinleveysmodulaatio                |
| Q       | Quantiser                                            | kvantisoija                           |

| Lyhenne | Alkuperä                           | Suomalainen vastine            |
|---------|------------------------------------|--------------------------------|
| R       | Real component                     | reaalikomponentti              |
| RAM     | Random access memory               |                                |
| Res     | Residue                            | residy                         |
| ROC     | Region of convergence              | suppenemisaralue               |
| ROM     | Read only memory                   |                                |
| RLS     | Recursive least squares            | rekursiivinen pienin neliö     |
| RMS     | Root mean square                   | tehollisarvo                   |
| SAQ     | Self assesment question            |                                |
| SBC     | Sub-band coder                     | alikaista kooderi              |
| SG      | Stochastic gradient                |                                |
| S/H     | Sample and hold                    | näyte ja pito                  |
| S-H     | Sample and hold                    | näyte ja pito                  |
| SNR     | Signal-to-noise ratio              | signaali-kohinasuhde           |
| TDM     | Time division multiplex            |                                |
| THD     | Total harmonic distortion          | harmoninen särö                |
| VHSIC   | Very high speed integrated circuit | hyvin nopea integroitu piiri   |
| VLSI    | Very large scale integrated        | hyvin suuri integroitu piiri   |
| WWW     | World Wide Web                     |                                |
| ZOH     | Zero order hold                    | nollannen kertaluvun pitopiiri |

## SYMBOLIT

|                  |                                                                 |
|------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $a_i$            | digitaalisen suodattimen rekursiivisen osan kerroin $i$         |
| $A$              | A-lain PCM kompanderin vakio<br>amplitudi                       |
| $b_i$            | digitaalisen suodattimen ei rekursiivisen osan kerroin $i$      |
| $B$              | vakio<br>kaistaleveys<br>kohinateho                             |
| $D$              | desimointikerroin, näytteenottotaajuuden alennuskerroin         |
| $e(n)$           | diskreettiaikainen virhesignaali                                |
| $e(nT)$          | diskreettiaikainen virhesignaali, jonka näytteenottoväli on $T$ |
| $e(t)$           | jatkuva-aikainen virhesignaali                                  |
| $f$              | taajuusmuuttuja                                                 |
| $f_h$            | taajuusmuuttujan ylempi raja                                    |
| $f_p$            | päästökaistan rajataajuus                                       |
| $f_s$            | estokaistan rajataajuus                                         |
| $F$              | näytteenottotaajuus                                             |
| $h(n)$           | diskreettiaikaisen järjestelmän impulssivaste                   |
| $h_D(n)$         | ideaalisen suodattimen impulssivaste                            |
| $h(t)$           | jatkuva-aikaisen järjestelmän impulssivaste                     |
| $H(e^{j\omega})$ | diskreettiaikaisen järjestelmän taajuusvaste                    |
| $H(s)$           | Laplace siirtofunktio                                           |
| $H(z)$           | z-siirtofunktio                                                 |
| $H(\omega)$      | jatkuva-aikaisen järjestelmän taajuusvaste                      |
| $i$              | imaginäärimuuttuja                                              |



|              |                                                                                                                              |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $I$          | interpolointikerroin, näytteenottotaajuuden nostokerroin                                                                     |
| $I_0$        | nollannen kertaluvun modifioitu Besselin funktio                                                                             |
| $Im$         | imaginääriosia                                                                                                               |
| $j$          | imaginäärimuuttuja                                                                                                           |
| $K$          | amplitudi                                                                                                                    |
| $L_p$        | $p$ :s normi                                                                                                                 |
| $M( )$       | argumentin itseisarvo                                                                                                        |
| $M(\omega)$  | amplitudivaste                                                                                                               |
| $n$          | nano = $10^{-9}$                                                                                                             |
| $N$          | riippumaton kokonaislukumuuttuja<br>digitaalisen suodattimen kertaluku<br>diskreetin Fourier-muunnoksen näytteiden lukumäärä |
| $p_i$        | napa $i$                                                                                                                     |
| $P$          | teho                                                                                                                         |
| $q$          | kvantisointiaskel                                                                                                            |
| $Q\{ \}$     | kvantisointioperaattori                                                                                                      |
| $r$          | itseisarvo                                                                                                                   |
| $r_i$        | nollan säde                                                                                                                  |
| $R$          | säde                                                                                                                         |
| $R[ ]$       | diskreettiaikainen järjestelmäoperaattori                                                                                    |
| $Re$         | reaaliosa                                                                                                                    |
| $s$          | Laplace muuttuja                                                                                                             |
| $s_{p,k}$    | $k$ :n lohkon Laplace napa                                                                                                   |
| $s_{z,k}$    | $k$ :n lohkon Laplace nolla                                                                                                  |
| $s(t)$       | jatkuva-aikainen signaali                                                                                                    |
| $s_q(t)$     | kvantisoitu jatkuva-aikainen signaali                                                                                        |
| $T$          | näytteenottoväli                                                                                                             |
| $T_g$        | ryhmäviive                                                                                                                   |
| $T_p$        | vaiheviive                                                                                                                   |
| $T( )$       | jatkuva järjestelmäoperaattori                                                                                               |
| $T[ ]$       | diskreetti järjestelmäoperaattori                                                                                            |
| $T\{ \}$     | diskreetti järjestelmäoperaattori                                                                                            |
| $u$          | pulssin leveys                                                                                                               |
| $V_N$        | $N$ :n asteen Chebyshev polynomi                                                                                             |
| $w(n)$       | ikkunafunktio                                                                                                                |
| $x(n)$       | diskreetti signaali                                                                                                          |
| $x(nT)$      | diskreetti signaali, jonka näytteenottoväli $T$                                                                              |
| $x'(nT)$     | kvantisoitu diskreetti signaali                                                                                              |
| $\hat{x}(n)$ | diskreetin signaalin estimaatti                                                                                              |
| $x(t)$       | jatkuva signaali                                                                                                             |
| $X(f)$       | diskreetin Fourier-muunnoksen ulostulon spektri kun sisäänmenona on $x(n)$                                                   |
| $X(k)$       | diskreetin Fourier-muunnoksen ulostulotaajuus $k$                                                                            |
| $X(s)$       | $x(t)$ :n Laplace muunnos                                                                                                    |
| $X(z)$       | $x(n)$ :n z-muunnos                                                                                                          |

|                       |                                                  |
|-----------------------|--------------------------------------------------|
| $y(n)$                | prosessoitu diskreetti ulostulosignaali          |
| $Y(f)$                | lähtösignaalin $y(n)$ diskreetti Fourier-muunnos |
| $z$                   | z-tason muuttuja                                 |
| $z_i$                 | z-tason nolla $i$                                |
| $z_{p,k}$             | $k$ :n lohkon z-tason napa                       |
| $z_{z,k}$             | $k$ :n lohkon z-tason nolla                      |
| $\delta$              | Diracin delta funktio                            |
| $\delta_p$            | päästökaista aaltoilu                            |
| $\delta_s$            | estokaistan aaltoilu                             |
| $\delta(nT)$          | diskreetti yksikköimpulssi                       |
| $\delta(t)$           | jatkuva-aikainen impulssi                        |
| $\varepsilon$         | aaltoiluparametri                                |
| $\eta$                | hyötysuhde                                       |
| $\lambda$             | estokaistan vaimennusparametri                   |
| $\mu$                 | odotusarvo                                       |
| $\theta(e^{j\omega})$ | diskreetti vaihevaste                            |
| $\theta(\omega)$      | jatkuva-aikainen vaihevaste                      |
| $\sigma$              | keskihajonta                                     |
| $\sigma^2$            | varianssi                                        |
| $\tau$                | aikavakio, pulssin leveys                        |
| $\phi()$              | argumentin vaihe                                 |
| $\Phi$                | kulma                                            |
| $\omega$              | kulmataajuus                                     |
| $\omega$              | esivääristetty kulmataajuus                      |
| $\omega_c$            | rajataajuus                                      |
| $\Omega$              | analoginen taajuus                               |

## ERIKOISFUNKTIOT

|                   |                                       |
|-------------------|---------------------------------------|
| $E[ ]$            | tilastollinen odotusarvo-operaattori  |
| $\langle \rangle$ | aikakeskiarvo                         |
| $*$               | konvoluutio                           |
| $a^*$             | $a$ :n kompleksikonjugaatti           |
| $F[ ]$            | Fourier muunnosoperaattori            |
| $F^{-1}[ ]$       | käänteinen Fourier muunnosoperaattori |
| $L[ ]$            | Laplace muunnosoperaattori            |
| $L^{-1}[ ]$       | käänteinen Laplace muunnosoperaattori |
| $sa(x)$           | näytteenottofunktiio                  |
| $\text{sgn}(x)$   | merkkifunktio                         |
| $\text{sinc}(x)$  | sinc funktio                          |
| $Z^{-1}$          | käänteinen z-muunnos                  |
| $Z$               | z-muunnos                             |

## SISÄLLYSLUETTELO

### OSA 1

Esipuhe

Lyhenteet, symbolit ja erikoisfunktiot

Johdanto

    Tausta

    Digitaalisen kuvan esitys

    Kuvankäsittelyn prosessi

    Digitaalisen kuvankäsittelyprosessin komponentit

Digitaalisen kuvan perusteet

    Näkö

    Yksinkertainen kuvamalli

    Näytteenotto ja kvantisointi

    Pikselien suhteita

    Kuvan geometria

kuvamuunnokset

    Johdanto fourier-muunnokseen

    Diskreetti Fourier-muunnos

    Kaksidimensioisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia

    Nopea Fourier-muunnos

    Muita separoituvia kuvamuunnoksia

Kuvan parantaminen

    Tausta

    Parantaminen pisteprosessina

    Spatiaalinen suodatus

    Parantaminen taajuustasossa

    Spatiaalisen maskin generointi

    Värikuvan prosessointi

Kuvan korjaus

    Virhemallit

    Diagonalisointi ja sirkulointimatriisit

    Algebrallinen lähestyminen kuvan parantamiseen

    Käänteinen suodatus

    LSM-suodatus

    LS-korjaus

    Interaktiivinen korjaus

    Korjaus spatiaalitasossa

    Geometriamuunnokset



# JOHDANTO DIGITAALISEEN KUVANKÄSITTELYYN

Raimo Jokinen

-  Digitaalisen kuvankäsittelyn taustaa
-  Digitaalinen kuvan esitystapa
-  Digitaalisen kuvankäsittelyn prosessi

Kuvan hankkiminen

Kuvan tallennus

Kuvan prosessointi

Kuvan siirto

Näytöt

-  Viitteet
-  Harjoitustehtävät

*Digitaalisen kuvankäsittelyn sovellutuskohteiden määrä kasvaa tällä hetkellä hyvin nopeasti. Monessa tapauksessa digitaalinen kuvankäsittely tarjoaa mahdollisuuden toteuttaa edullisesti aiemmin hankalia tehtäviä. Sen lisäksi digitaalinen kuvankäsittely tarjoaa laajan joukon sovellutuksia, joita ei voi toteuttaa toisin. Toisaalta riippumatta tekniikasta, kuva tarjoaa sellaisenaan oman kiehtovan maailmansa.*

## DIGITAALISEN KUVANKÄSITTELYN TAUSTAA

Kiinnostus kuvankäsittelyyn johtuu kahdesta periaatteellisesta syystä

- \*\* parantaa kuvaa paremmin sopimaan ihmisen aisteille
- \*\* näkymien automaattiseen koneelliseen havainnointiin

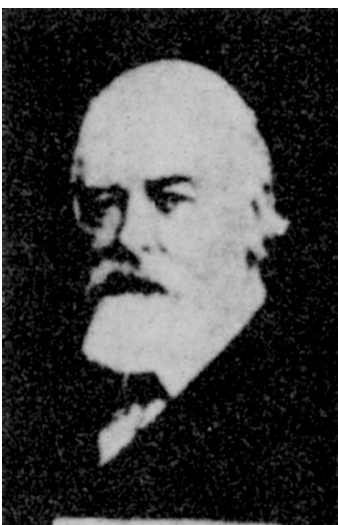
Ensimmäisiä yrityksiä kuvan laadun parantamiseksi tehtiin, kun digitoituja kuvia lähetettiin Atlannin pohjaan upotettuja kaapeleita pitkin Lontoon ja New Yorkin välillä. Kun Bartlanen kaapeloitu kuvien siirtojärjestelmä esiteltiin 1920-luvun alussa, kuvien lähetysaika atlannin poikki lyheni vikosta alle kolmeen tuntiin.

Erikoistuneet kirjoitinlaitteet koodasivat kuvan kaapelisiirtoa varten ja rekonstruoivat ne vastaanotossa.



*Kuva jo.1 Digitaalinen kuva vuodelta 1921. Kuva on printattu lennätinkirjoittimella, johon oli asennettu erikoiskirjoituspää.*

Näiden alkuaikojen kuvien laadun parantamisen ongelmia oli, että kuvien visuaalinen laatu riippui kirjoitin proseduurista ja harmaatasojen määrä oli pieni. Vuoden 1921 loppuun mennessä valtasi alaa menetelmä, joka perustui valokuvausfilmiin, jota valotettiin reiitetyn lennätinnauhan läpi.



*Kuva jo.2 Digitaalinen kuva, joka on tehtyvalottamalla reiitetyn lennätinnauhan läpi. Kuva on kulkenut kahdesti Atlannin poikki. Kuva on vuodelta 1922*



*Kuva jo.3 Digitaalinen kuva, jossa on 15 harmaasävyä. Kuva on vuodelta 1929.*

Varhainen Bartlett-järjestelmä kykeni koodaamaan kuvat viidellä harmaatasolla. Tasojen määrä oli vuoteen 1929 mennessä kasvanut 15:sta. Näinä vuosina kehitettiin myös menetelmä valottaa valokuvauslevy kuvanauhan moduloiman valon avulla.

Kuvien prosessoinnin taso parani tasaisesti seuraavien 35 vuoden aikana. Tietokoneiden kehitys oli johtanut käyttökelpoisiin ratkaisuihin 50-luvun alkuun mennessä. Tästä eteenpäin digitaalisen kuvan kehitys oli sidottu tietokoneiden kehitykseen. Tässä suhteessa ensimmäisiä soveltajia oli avaruustekniikka.

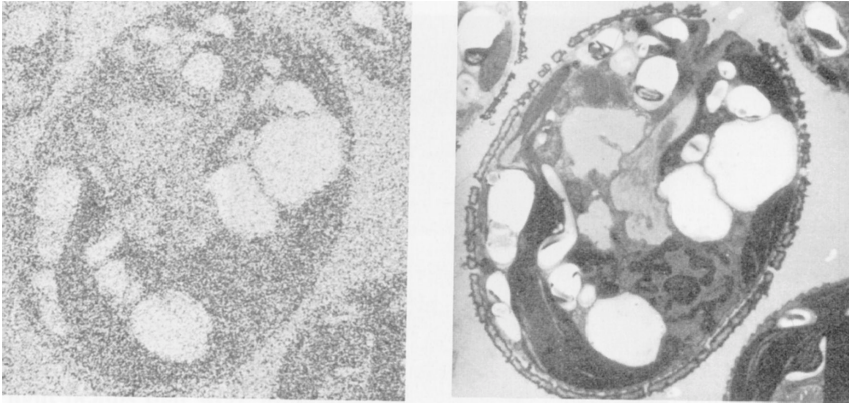
Kuvien parantamiseksi ja korjaamiseksi tietokonetekniikan avulla työskenteli Jet Propulsion Laboratory Pasadenassa Kaliforniassa. Ensimmäinen merkittävä sovellutus oli vuoden 1964 Ranger aluksen laskeutuminen Kuuhun. Aluksella oli mukana televisiokamera, jonka kuvien laatua korjattiin digitaalisesti tietokoneilla. Ranger tekniikkaa toimi perustana, kun entistä kehittyneempiä menetelmiä sovellettiin kuvien visuaalisen laadun parantamiseen ja virheiden korjaamiseen seuranneilla miehittämättömillä muilla kuulennoilla. Tämän jälkeen seurasivat miehitetyt kuulennot ja luotaimien lennot Marsiin, joissa jokaisessa digitaalinen kuvankäsittely muodosti oleellisen osan viestintää.

Vuoden 1964 jälkeen kehitys oli voimakasta ja digitaalista kuvankäsittelyä sovellettiin yhä uusille aloille. Edelleen eräs tavoite on parantaa kuvien visuaalista luettavuutta. Esimerkiksi lääketieteessä röntgenkuvien kontrastia parannetaan tai käytetään erilaisia väritystekniikoita paremman luettavuuden saavuttamiseksi. Muita soveltajia ovat

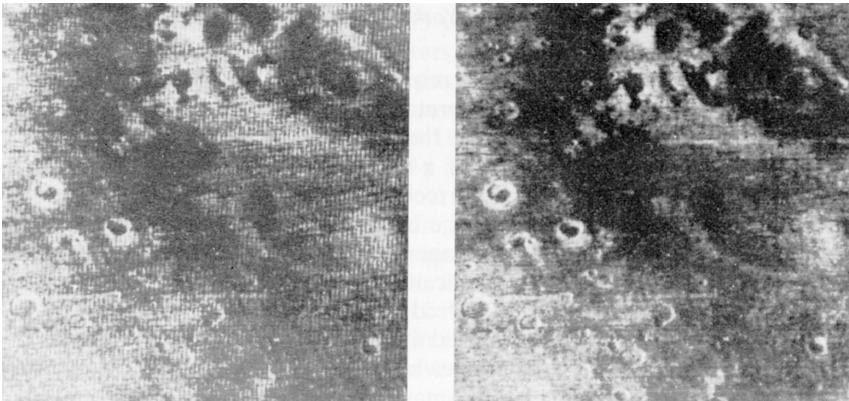
- \*\* satelliittikartoitus
- \*\* arkkeologia
- \*\* säätieteilijät
- \*\* fysiikka
- \*\* puolustustekniikka
- \*\* turvallisuustekniikka

Turvallisuustekniikan puolella läntinen maailma on täynnä valvontakameroita. Sillä alueella työskennellään kuumesti henkilön tunnistamiseksi etäältä silmien perusteella. Seuraavissa kuvissa on joukko tyypillisiä sovellutuksia.

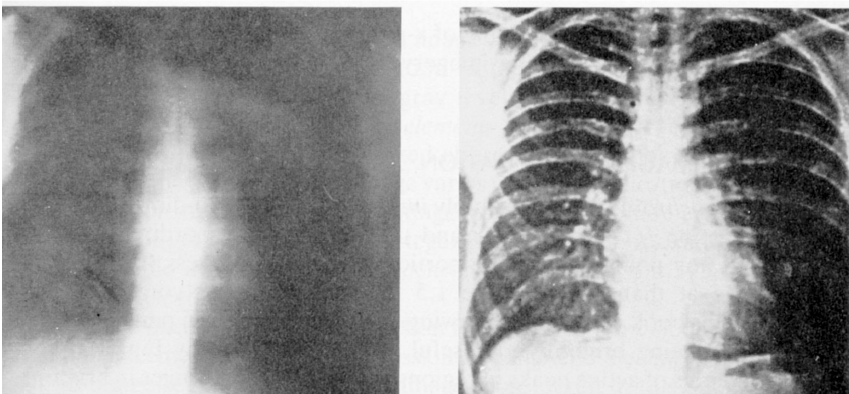




*Kuva jo.4 Kohinan pilaamasta kuvasta on suodatettu kohina pois*



*Kuva jo.5 Interferenssikuvio on poistettu satelliitin lähettämästä kuvasta*



*Kuva jo.6 Röntgenkuvan luettavuuden parantaminen kontrastia muuttamalla*



*Kuva jo.7 Tasaisen liikkeen pilaama kuva, joka on saatu korjattua laskemalla pikselien arvot uudelleen.*



Edelliset esimerkit käsittelivät kuvien luettavuuden parantamista ihmiselle sopivaan muotoon. Koneellisesti luettavista kuvista halutaan erottaa informaatio, jota voidaan käyttää edelleen tietokoneprosesseissa. Koneen ymmärtämä informaation muoto voi olla muunkinlaista kuin ihmisen käyttämä, esimerkiksi kuvan Fourier-muunnos. Hahmontunnistuksen ongelmia voivat olla

- \*\* merkin tunnistus
- \*\* teollinen konenäkö
- \*\* kappaleen tunnistus
- \*\* sotilaallinen tunnistus
- \*\* sormenjälkien tunnistus
- \*\* jne

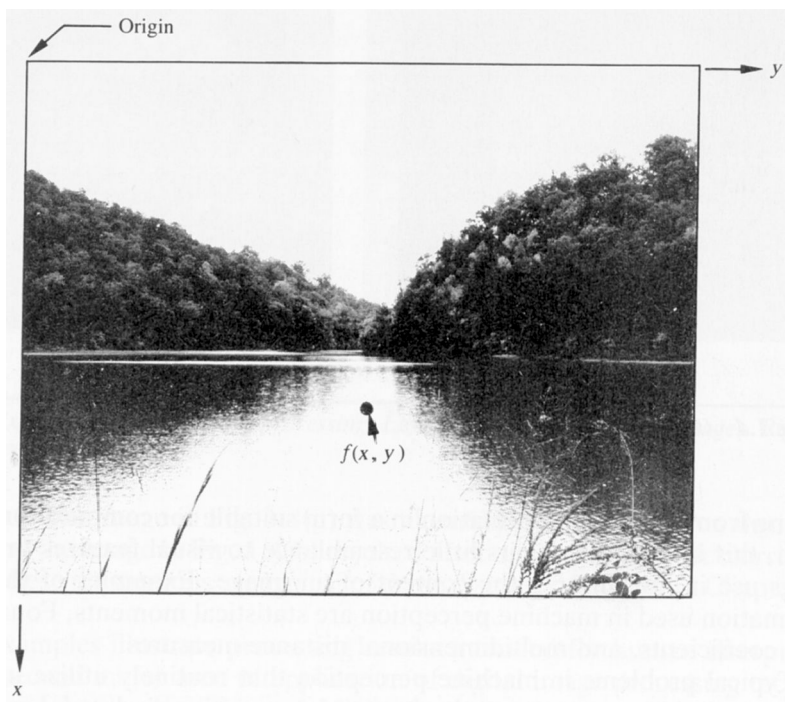
## DIGITAALISEN KUVAN ESITYSTAPA

Nimityksellä yksivärinen kuva tai vain kuva viitataan kaksidimensioiseen valon intensiteettifunktioon

$$f(x,y)$$

jossa  $x$  ja  $y$  ovat spatiaaliset koordinaatit ja  $f$ :n arvo jokaisessa pisteessä  $(x, y)$  on suhteellinen kirkkauteen tai harmaatasoon (kuva jo.8). Joskus kuvan kirkkaus ilmaistaan kolmiulotteisen koordinaatiston  $z$ -akselin arvona.

Digitaalinen kuva on kuva  $f(x, y)$ , joka on digitoitu sekä spatiaalisten koordinaattien että kirkkauden suhteen. Digitaalinen kuva voidaan ajatella matriisina rivit ja sarakkeet ovat kuvan pisteitä ja elementin arvo vastaa pisteen kirkkautta. Digitaalisen kuvan pisteitä kutsutaan nimellä kuvaelementti, pikseli tai pel. Kuvan dimensiot riippuvat sovellutuksesta, mutta neliömäisellä kuvalla on joitakin laskennallisia etuja.



Kuva jo.8 Digitaalisen kuvan koordinaatisto ja yksittäinen kuvapiste pikseli.

## KUVANKÄSITTELYN PROSESSI

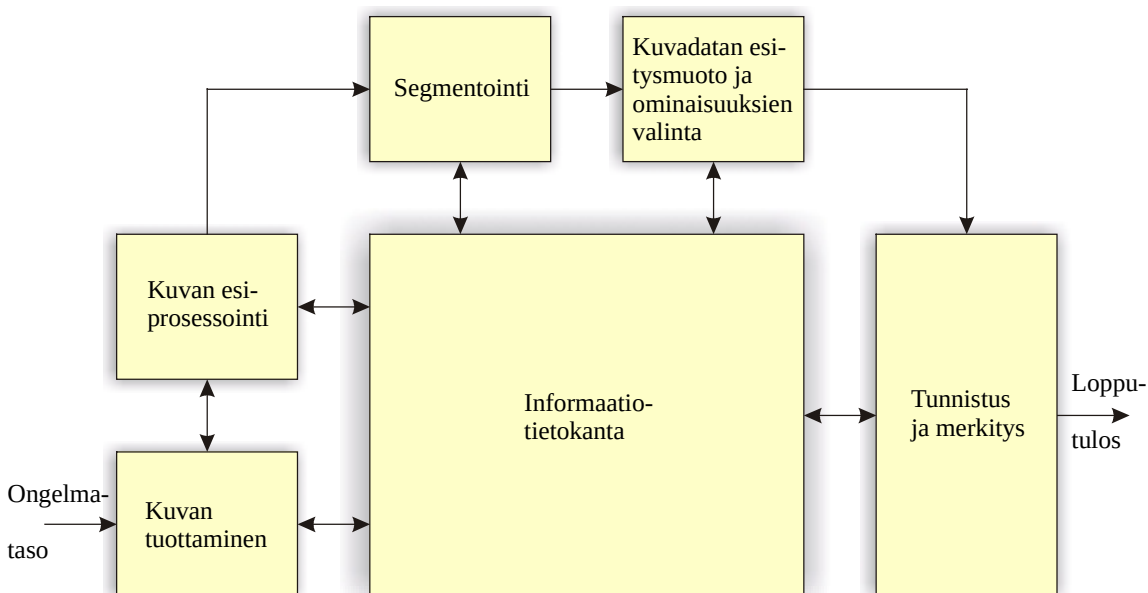
Digitaalinen kuvankäsittely vaatii suuren joukon laitteistoja, ohjelmistoja ja myös teoreettista osaamista. Laitteistoista ja ohjelmistoista puhutaan kappaleessa Digitaalisen kuvankäsittelyn elementit. Perus kuvankäsittelyn prosessi on kuvattu kuvassa jo.9. Riippuen kuvankäsittelyn tavoitteesta, kuva käy läpi joko osan tai koko prosessin.

Ensimmäinen vaihe on kuvan tuottaminen, jossa jostakin lähteestä saatava kuvasignaali muutetaan digitaaliseen muotoon. Kuvasignaalin muodostamiseen tarvitaan jokin valoherkkä sensori, joka voi olla yksi- tai täysvärinen. Tyypillinen kuvasensori on televisiokamera tai se voi olla line-scan kamera, jonka liike muodostaa kaksiulotteisen kuvan (scanner). Ellei kameran tuottama kuva ole valmiiksi digitaalisessa muodossa, on kuvasignaali digitoitava.

Sen jälkeen kun on saatu muodostettua digitaalinen kuva, seuraa sen esiprosessointi. Esiprosessoinnin avaintehtävä on parantaa kuvaa niin, että seuraavilla vaiheilla on paremmat mahdollisuudet onnistua tehtävissään. Esiprosessointi käsittää sellaisia tekniikoita kuin kontrastin parantaminen, kohinan vaimennus ja sellaisten alueiden eristäminen, jotka sisältävät todennäköisesti tekstiä.

Seuraava vaihe on segmentointi, jonka tehtävänä on jakaa kuva komponentteihin tai objekteihin. Tyypillisiä komponentteja ovat esimerkiksi rajat tai linjat. Yleisesti segmentointi on digitaalisen kuvankäsittelyn eräs vaikeimmista tehtävistä. Hyvä segmentointi auttaa oleellisesti seuraavia vaiheita tai huono estää hahmojen tunnistuksen kokonaan.

Segmentoinnin ulostulo on tavallisesti raaka pikselidata rajoista tai alueista tai alueiden sisällöstä. Tässä vaiheessa data muutetaan jatkokäsittelyn kannalta sopivaan muotoon, alueisiin tai rajoihin. Rajaesitys on sopiva, jos haetaan muotoja. Sisäisiä ominaisuuksia tutkittaessa alue on oikea esitysmuoto. Molempia ominaisuuksia tarvitaan esimerkiksi tekstin tunnistuksessa. Esitystavan valinta on vain osa tehtävää. Sen lisäksi tarvitaan menetelmä, jolla valitaan sellaiset ominaisuudet, että haluttu informaati saadaan kuvasta esille.



Kuva jo.9 Perus digitaalisen kuvankäsittelyn prosessi

Seuraavassa vaiheessa tunnistetaan alue valittujen ominaisuuksien perusteella ja annetaan sille merkitys. Esimerkinä voi olla vaikka kirjain c. Tämän jälkeen annetaan merkkijoukolle merkitys. Esimerkiksi on tunnistettu viisi kirjainta ja tässä vaiheesssa niistä muodostetaan viisikirjaiminen sana.

Kuvanmuodostusvaiheessa saatu digitaalinen informaatio tallennetaan tietokantaan. Samalla sinne voidaan tallentaa tietoa siitä, missä kohtaa kuvaa kiinnostava tieto sijaitsee ja keskittää jatkossa toimenpiteet vain tälle alueelle. Tietokantaan voidaan tallentaa myös monimutkaisempaa tietoa kuten tiedot kuvan virheistä. Samoin tietokantaan voidaan tallettaa tietoja siitä, missä muodossa kuvan ingormaatoin on. Esimerkkinä viimeksimainitusta on viivakoodisysteemi, jossa oleellinen tieto on viivasysteemin merkitys.

Järjestelmään kuuluu lisäksi oleellisena osana näyttö, jolla kuva saadaan luettavaan muotoon. Kuvaa voidaan tarkastella kaikissa prosessointivaiheissa. On myös huomattava, että kaikkia käsittelyvaiheita ei aina tarvita. Esimerkiksi ihmisen aisteille tarkoitetut kuvat menevät harvoin pidemmälle kuin kuvan esiprosessointiin. Sensijaan tekstin tunnistus käy läpi koko prosessin.

## KUVANKÄSITTELYPROSESSIN KOMPONENTIT

Järjestelmä, joka kykenee toteuttamaan edelläkuvatun digitaalisen kuvankäsittelyprosessin, on kuvassa jo.10. Yleisesti tämäntyyppinen järjestelmä kykenee

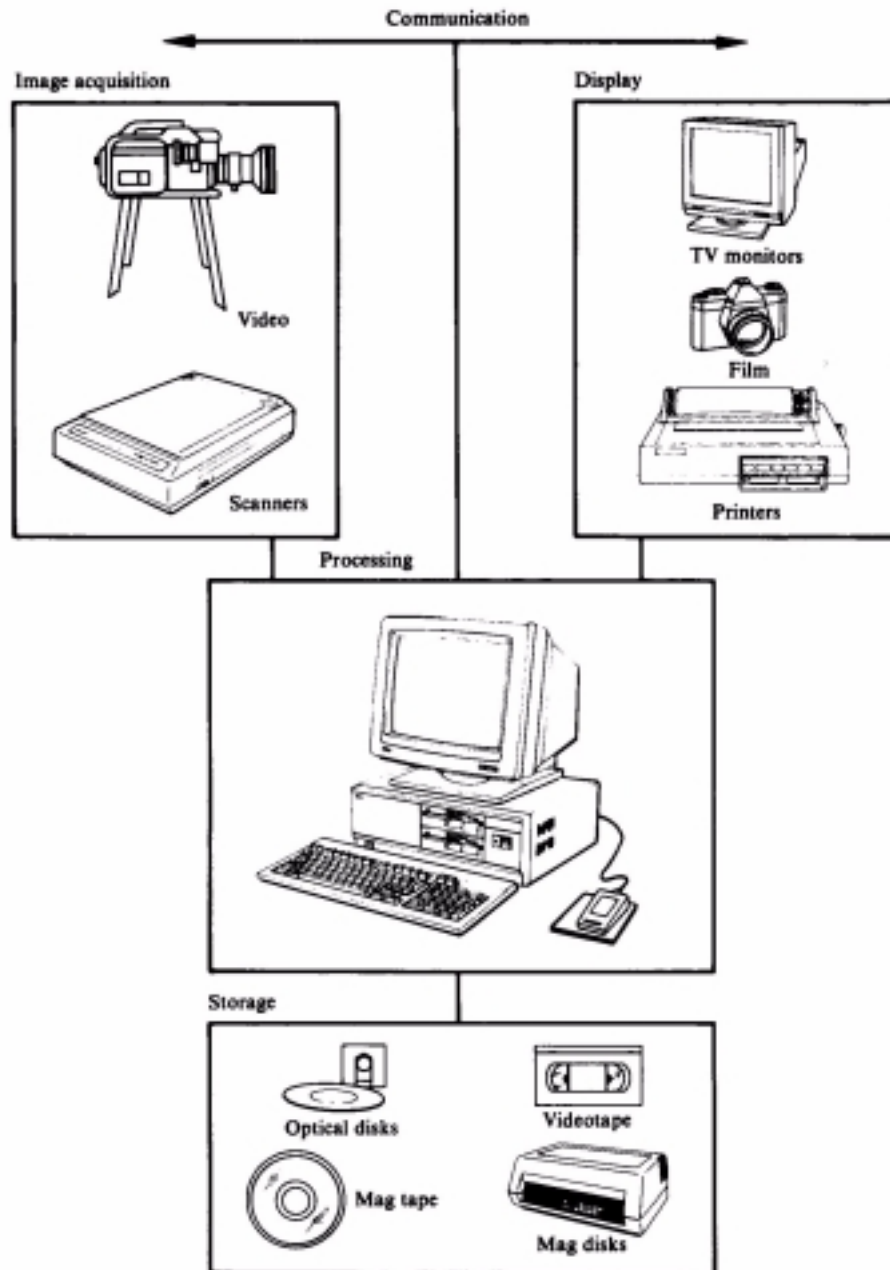
- \*\* tuottamaan digitaalisen kuvan
- \*\* tallentamaan kuvan
- \*\* prosessoimaan kuvaa
- \*\* siirtämään kuvaa
- \*\* näyttämään kuvan

## KUVAN TUOTTAMINEN

Digitaalisen kuvan tuottamiseen tarvitaan kaksi elementtiä. Ensimmäinen on fyysinen sensori, joka on herkkä jollekin sähkömagneettisen säteilyn spektrin osalla ja joka kykenee tuottamaan sähköisen signaalin. Sähköisen signaalin on oltava suhteessa sähkömagnaattisen säteilyn intensiteettiin. Toinen elementti on digitoija, joka muuttaa sensorin tuottaman jatkuvan signaalin digitaaliseen muotoon.

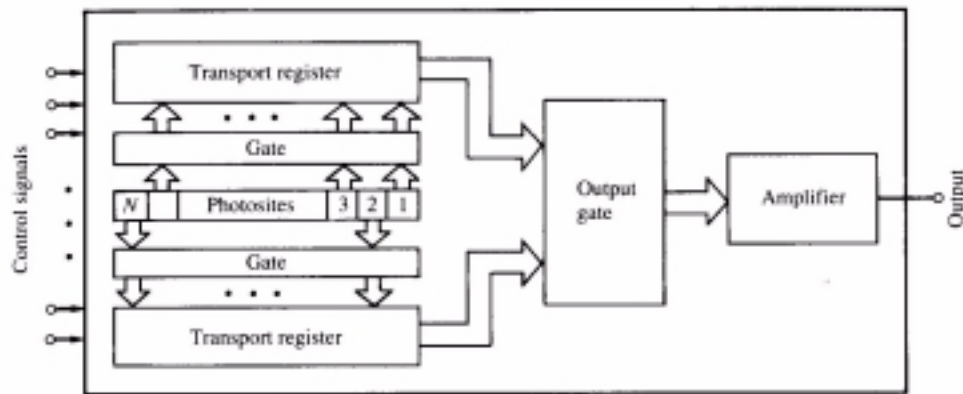
Esimerkiksi röntgen säteitä käytetään lääketieteellisiin tarkoituksiin tutkittaessa ihmisen sisäistä rakennetta. Kuva voi muodostua röntgensäteille herkälle valokuvausfilmille. Muita vaihtoehtoja ova tälle taajuusalueelle herkat televisiokamerat. Ehkä suurimman ryhmän laitteita muodostavat näkyvälle valolle tai infrapunalle herkat kamerat. Aikaisemmin käytettyjen tyhjiöputkeen perustuvat sensorit ovat väistymässä puolijohteisiin perustuvien sensorien tieltä.

- \*\* mikroherkkyysmittari on laite, joka tutkii esimerkiksi valokuvaa piste pisteeltä. Digitoitava kuva on asennettu joko tasaiselle liikkuvalla pinnalle tai pyörivän rummun pinnalle. Kuvaa kohdistetaan fokuoitu valonsäde ja heijastunut säteily mitataan. Myös läpinäkyviä kalvoja voidaan käyttää.



Kuva jo.10 Tyypillinen digitaalisen kuvankäsittelyn laitteisto

- \*\* Tyhjiöputkeen perustuvan Vidikonin toimii valijohtavuuden periaatteella. Kuva muodostetaan pinnalle, johon kohdistetaan myös elektronisuihku, joka skannaa koko pinnan. Riippuen pinnan pisdeen johtavuudesta, varauksen neutralisointi synnyttää kuvapisteen kirkkauteen verrannollisen jännitteen. Tuloksena saatava jatkuva jännite digitoidaan.
- \*\* Puolijohdeanturit koostuvat diskreeteistä kuvaelementeistä (englanninkielinen nimitys photosite), joiden lähtöjännite on verrannollinen valon intensiteettiin. Käytössä on kaksi periaatteeltaan erilaista kuvaelementtien järjestelyä. Ensimmäisessä juovan skannaus sensorissa kuvaelementit ovat rivissä ja kaksiulotteisen kuvan muodostamiseksi joko sensoria tai kuvaa on liikuteltava (kuva jo.11). Tämän tyyppistä



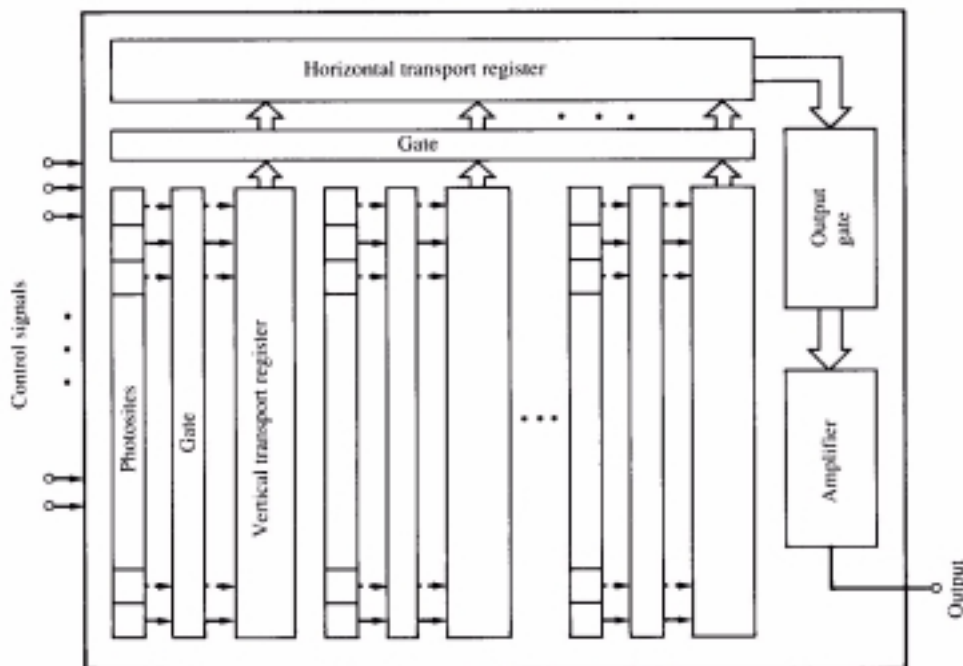
Kuva jo.11 Line scan tyyppisen kuva-anturin rakenne

sensoria käytetään yleisesti skannereissa. Toisessa tyypissä, aluesensorissa, kuvaelementit on järjestetty matriisiin muotoon (kuva jo.12). Tämän tyyppin anturilla kuva voidaan muodostaa kerralla on siten näistä kahdesta nopeampi. Puolijohdeanturit ovat erittäin nopeita muihin laitetyppeihin verrattuna.

Puolijohdeantureina käytetään nykyään sekä CCD-laitteita että CMOS-sensoreita. Line Scan tyyppisten sensorien resoluutio on tyypillisesti 256 elementistä ylöspäin. Maksi lienee jossakin 10000 elementin nurkilla. Alueanturien resoluutio alkaa  $32 \times 32$  elementistä. Maksimiresoluutio tällä hetkellä lienee jossakin  $2048 \times 2048$  elementtiä. Aluesensoreita käytetään tällä hetkellä suurissa määrissä kuluttajille tarkoitetuissa sekä stillkuvakameroissa että videokameroissa.

## MUISTIT

Kuvankäsittelyssä muisteja tarvitaan kolmentyyppiseen tallennukseen riippuen aikajänteestä.



Kuva jo.12 Aluesensorin rakenne

- \*\* lyhytaikainen muisti, jota tarvitaan kuvan välittömään prosessointiin.
- \*\* tilapäinen muisti (on-line), josta kuvaa haetaan suhteellisen usein.
- \*\* arkistointimuisti, jonne kuvat tallennetaan pysyvästi. Kuvia haetaan arkistointimuistista verrattain harvoin.

Erään lyhytkestoisen muistin tarjoaa tietokoneen muisti. Toinen mahdollisuus kehysbufferiksi kutsuttu levy, jolle voidaan tallettaa yksi tai useampia kuvia. Levyltä kuvia voidaan zoomata, skrollata tai panoroida. Kehysbufferikorttien koko on yli 32 Mbyteä.

Tilapäismuistina toimii usein magneettinen levy. Muita tilapäisiä muisteja voivat olla magneto-optiset levyt. Tilapäismuistista kuvaa luetaan suhteellisen usein niin, että peräkkäiseen tallennukseen perustuvat mediat eivät sovellu tähän tarkoitukseen. 30 ... 100 optisen levyn jukeboxit muodostavat mukavan ja suhteellisen suuren nopeasti luettavan ja tallennettavan kuvien tilapäisen varaston.

Arkistointimuistin kapasiteetin täytyy olla suuri. Lukukertojen määrä sensijaan voi olla pieni. Lisäksi kuvien on säilyttävä riittävän pitkään muistissa ilman erityistoimenpiteitä. Suuritiheyksiset magnaattinauhat soveltuvat tähän tarkoitukseen. Myös optisia levyjä voidaan käyttää. Levymäiset tallennukset tarjoavat lisäksi tilapäismuistin ominaisuuksia. Tällä hetkellä DVD-levy tarjoaa suurimman levykapasiteetin. Suhteellisen läheisessä tulevaisuudessa yhdelle DVD-levylle voitaneen tallentaa n. 64 Gtavua kuvadataa. Tämä riittää n. 64.000 1024×1024 kuvalle, joissa on 256 harmaasävyä. Täysvärikuvia levylle mahtuu n. 21.000.

## PROSESSOINTI

Digitaalinen kuvankäsittely on usein algoritmin muodossa. Näinolle kuvan tuottamista ja näyttöä lukuunottamatta kuvan prosessointi voidaan toteuttaa ohjelmallisesti. Poikkeuksen tähän muodostaa reaaliaikainen prosessointi, jossa tietokoneiden nopeus ei riitä. Tästä syystä joihinkin erityistarkoituksiin on kehitetty laitteistotason kuvankäsittelyjärjestelmiä. Näissäkin järjestelmissä ainakin osa prosessointia toteutetaan ohjelmallisesti.

80-luvun alkupuolella kuvankäsittelulaitteisto käsitti lähinnä tietokoneisiin liitettäviä laitteita. Vuosikymmenen loppupuolella markkinoille tuli työasemiin ja henkilökohtaisiin tietokoneisiin asennettavia kortteja. Samaan aikaan uudet yritykset tarjosivat markkinoille ohjelmistoperustaisia kuvankäsittelymenetelmiä. Vaikka edelleenkin myydään massiivisia järjestelmiä tehokäyttäjille, kuten satelliittikuvien käsittelyyn, trendi on kohti pienempiä järjestelmiä, jotka toimivat yleiskäyttöisissä tietokoneissa.

Kuvankäsittelyn ratkaisuja luonnehtii erikoistuminen. Järjestelmä, joka toimii moitteettomasti jossakin sovellutuksessa voi epäonnistua toisessa. Tällä alueella tehdään edelleen intensiivistä tutkimustyötä.

## TIEDONSIIRTO

Digitaalisessa kuvankäsittelyssä datan siirto voidaan jakaa paikalliseen- ja kaukosiirtoon. Paikallisesti tiedonsiirto digitaalisessa kuvankäsittelyssä on hoidettu yleensä tietokoneen sisäisiä väyliä ja ulkoisia liitäntöjä pitkin. Paikallinen siirto ei yleensä ole mikään ongelma.

Toisin on tilanne silloin, kun kuvia pitää siirtää pitempiä matkoja. Puhelinlankoja pitkin pystyttäneen tällä hetkellä lähettämään n. 45.000 bittiä sekunnissa. Tällöin yhden  $1024 \times 1024$  pisteen täysvärikuvan lähetys kestää n. 745 s. Nopeampia siirtoteitä voidaan käyttää, mutta silloin kustannukset myös nousevat. Kokonaisten kuvien lähetys ei ole kovin yksinkertainen tehtävä. Tarvittavan siirtoajan lyhentämiseksi on kehitetty joukko erilaisia kuvan kompressointimenetelmiä, jolloin lähetettävä bittimäärä yleensä putoaa varsin paljon. Samoin voidaan käyttää pakkausmenetelmiä kuvan tallennuksessa, jolloin tarvittava muistin määrä putoaa.

## NÄYTÖT

Mustavalko tai värimonitorit ovat pääasiallinen kuvien näyttöön käytetyt välineet. Nykyään ovat yleistyneet riittävän hyvänlaatuiset kirjoittimet kuvien tulostukseen. Tällä hetkellä vielä vallitseva näyttöväline on kuvaputki, jossa voimakkuusmoduloitu elektronisuihku pyyhkii kuvapintaa muodostaen kuvan. Uusina tulokkaina markkinoilla ovat ns. litteät näytöt, joita on tällä hetkellä saatavissa lävistäjältään 60” asti. Litteissä näytöissä on käytössä pääasiassa kolme eri tekniikkaa

- \*\* nestekidenäytöt
- \*\* plasmanäytöt
- \*\* elektroluminenssinäytöt

Näistä kahdella ensisimainitulla tekniikalla voidaan näyttää täysvärikuvia. Elektroluminenssitekniikka ei ole vielä ratkaissut sinisen värin ongelmaa tyydyttävästi. Nestekidenäyttö tarvitsee erillisen valolahteen kun molemmat muut tekniikat tuottavat itse valoa.

## LÄHTEET

Maurice Bellanger, *Digital Processing of Signals, Theory and Practice*, John Wiley & Sons 1987

David J. DeFatta, Joseph G. Lucas ja William S. Hodgkiss. *Digital Signal Processing, A System Design Approach*, John Wiley & Sons 1988

Rafael C. Gonzales, Richard E. Wood, *Digital Image Processing*, Addison Wesley 1993

Emmanuel C. Ifeachor ja Barrie W. Jervis, *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Addison-Wesley 1993

Leland B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publisher 1986

Anil K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall 1989

Lonnie C. Ludeman, *Fundamentals of Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons 1987

Bernard Mulgrew, Peter Grant ja John Thompson, *Digital Signal Processing, Concepts & Applications*, Macmillan Press LTD, 1999, London



## HARJOITUSTEHTÄVÄT

### 1. Mitä tarkoittavat termit

- |                      |                          |
|----------------------|--------------------------|
| a. digitaalinen kuva | b. harmaataso            |
| c. pikseli           | d. kuvan esiprosessointi |
| e. segmentointi      | f. line-scan sensori     |

### 2. Kuinka monta bittiä tarvitaan $512 \times 512$ mustavalkokuvan esittämiseen

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| a. kahdella harmaatasolla | b. neljällä harmaatasolla |
| c. 64 harmaatasolla       | d. 256 harmaatasolla?     |

### 3. Kuinka monta $1024 \times 1024$ kuvaa voidaan tallentaa yhdelle DVD-levylle

- a. 256 harmaasävykuvia
- b. kolmivärikuvia, kun kussakin värissä on 256 sävyä?

### 4. Miten toimii plasmanäyttö?



# DIGITAALISEN KUVAN PERUSTEET

- ◆ Ihmisen näkö
- ◆ Yksinkertainen kuvamalli
- ◆ Näytteenotto ja kvantisointi
- ◆ Pikselien suhteita
- ◆ Kuvan geometria
- ◆ Viitteet
- ◆ Harjoitustehtävät

*Digitaalinen kuvankäsittely perustuu joillekin yksinkertaisille perus lähtökohdille, joita ovat ihmisen näkö, näytteenotto ja kvantisointi.*

*Niiden, jotka haluavat menestyä, on kysyttävä oikeat peruskysymykset.*

*Aristoteles*

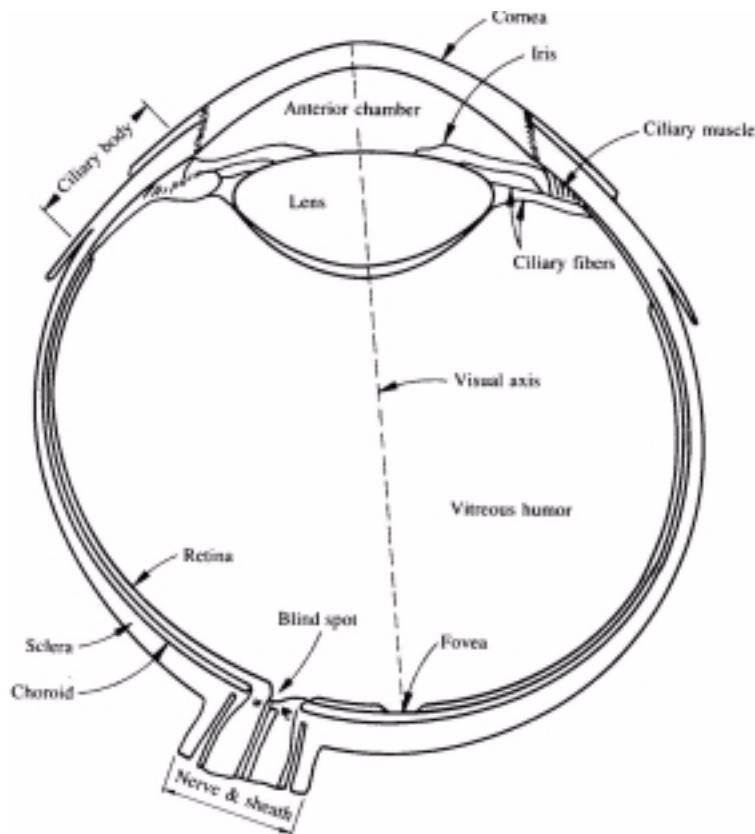
Useimmat kuvalähteet ovat luonteeltaan jatkuvia. Teknisessä kuvan käsittelyssä jatkuva kuva joudutaan digitoimaan sekä spatiaalisesti että kirkkaustasojen suhteen. Digitaalista kuvaa voidaan käsitellä yksinkertaisilla algoritmeilla. Kuvan käsittelyn tavoitteena voi olla sen visuaalisen luettavuuden parantaminen. Jotta ymmärtäisimme niitä vaatimuksia, joita asetetaan inhimillisiin tarkoituksiin soveltuvalla kuvalla, tutustutaan tässä kappaleessa aluksi ihmisen näköön ja sen ominaisuuksiin. Ennen näytteenoton käsittelyä luodaan lyhyt katsaus kuvamalliin, joka perustuu valon heijastumiseen. Näytteenoton jälkeen pohditaan pikselien keskinäisiä suhteita. Lopuksi tarkastellaan kuvan geometriaa.

## IHMISEN NÄKÖ

Monissa tapauksissa kuvankäsittelyn tavoitteena on mukauttaa kuva paremmin sopimaan ihmisen näkökykyyn. Silmän toiminnan ja näön ominaisuuksien tunteminen helpottaa ymmärtämään kuvankäsittelyalgoritmeille asetettavat vaatimukset. Ihmisen näöllä on ominaisuuksia, joita ei voi johtaa puhtaasti teknisesti.

## IHMISEN SILMÄN RAKENNE

Kuvassa dp.1 on ihmisen silmän halkileikkaus. Silmän muoto on lähes pallo, jonka halkaisija on n. 20 mm. Silmän kuoren muodostaa kolme kalvoa. Uloimpana on valkoinen kovakalvo (sclera), joka jatkuu silmän etupinnalle läpinäkyvänä sarveiskalvona (cornea). Kovakalvon alla on runsaasti verisuonia sisältävä suonikalvo (uvea), jonka pinta on voimakkaasti pigmentoitunut. Tämän tarkoituksena on estää ylimääräisen valon pääsy silmään. Sisinnä on verkkokalvo (retina). Verkkokalvon uloin osa on pigmenttiepiteeli, sisempänä on, sisempänä on aistiepiteeli ja sisinnä hermosolukerros. Silmän täyttää kirkas,



*Kuva dp.1 Ihmisen silmän halkileikkaus*

hyytelömainen lasiainen (vitreous humor).

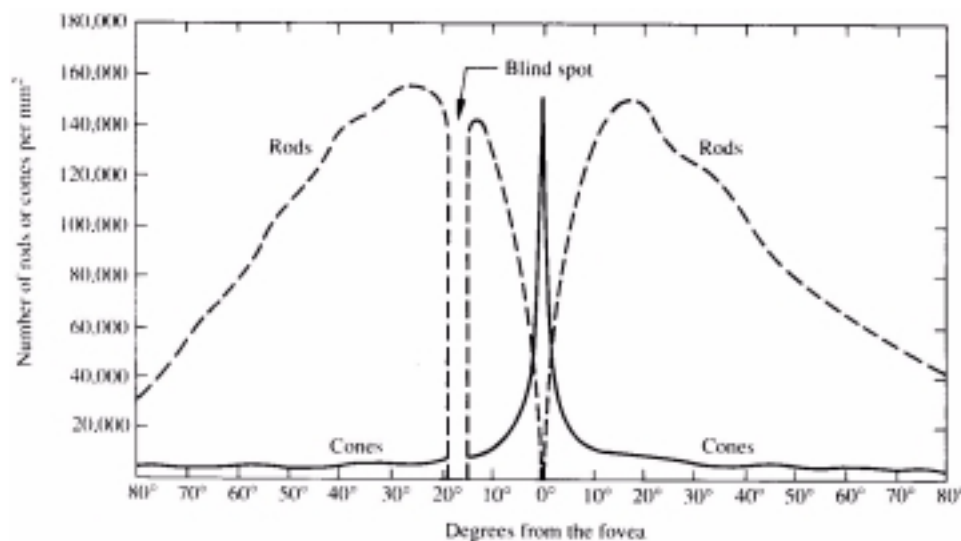
Verkkokalvon etulaidassa on sädekehä, jossa on sädelihas. Sädekehään ovat kiinnittyneet mykiön ripustimet, joihin puolestaan kiinnittyy mykiö eli linssi. Mykiö koostuu 60..70 % vedestä, n. 6 % rasvaa ja proteiineista, joita on enemmän kuin muissa silmän osissa. Linssi sisältää vähän keltaista pigmenttiä, joka lisääntyy iän myötä. Mykiön ja sädekehän edessä on värikalvo (iris). Sen keskellä on aukko, mustuainen eli silmäterä (pupilla), jonka suuruutta säättävät värikalvon ohuet lihakset. Silmäterän koko vaihtelee kahden ja kahdeksan mm:n välillä.

Silmämunan etuosassa on kaksi silmäveden täyttämää onteloa. Sarveiskalvon ja värikalvon välissä on etukammio ja värikalvon ja mykiön kiinnittimien väliin jää takakammio.

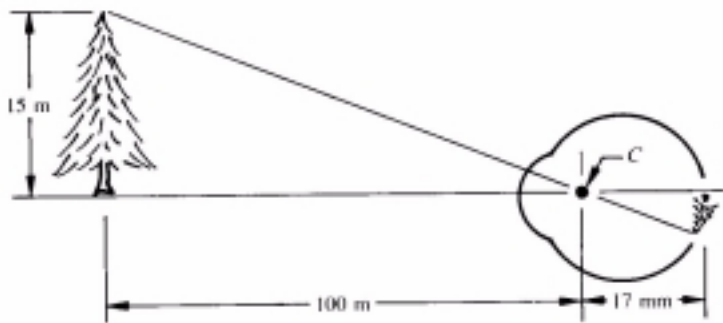
Verkkokalvon aistinepiteelissä on kahdenlaisia soluja, sauvoja ja tappeja. Sauvat ovat ohuita ja pitkiä soluja. Ihmisen verkkokalvossa niitä on n. 75...150 miljoonaa. Tapit ovat paksuja ja lyhyitä soluja ja niitä on verkkokalvon keskiosassa sauvojen väleissä. Verkkokalvon keskuskuopassa (fovea) ja siinä olevassa keltaisessa täplässä on yksinomaan tappeja. Keskuskuopassa tapit ovat ohuita ja siinä on runsas hermotus. Keskuskuoppa on tarkan näön keskus. Sitä verkkokalvon osaa, jossa on näkösoluja, sanotaan verkkokalvon näköosaksi. Tapit ja sauvat ovat yhteydessä hermosoluihin. Aistinsoluista silmän keskustaasta päin ovat kaksinapaiset hermosolut ja niiden sisäpuolella ns. hermosolmut. Siinä kohdassa, jossa hermosolmujen viejähaarakkeet yhtyvät näköhermoksi eli -juosteeksi ja johon verisuonet kerääntyvät, on ns. sokea täplä, jossa ei ole aistin eikä pigmenttisoluja.

Tappeja on n. 6...7 miljoonaa ja ne ovat herkkiä väreille ja vaativat kirkkaan valaistuksen. Sauvat muodostavat yleiskuvan. Ne eivät aisti värejä mutta toimivat pienillä kirkkauksilla (hämäränäkö). Kuvassa dp.2 on sauvojen ja tappien tiheys verkkokalvolla oikeassa silmässä.

Keskuskuoppa on muodoltaan ympyrä, jonka halkaisija on 1,5 mm. Aistinsolujen määrä tällä alueella on n. 150.000 neliömillimetrillä ja kokonaismäärä n. 337.000. Tämä vastaa keskiresoluutioista CCD-kennoa, jolla on n. 7×7 mm:n alueella vastaava määrä kuvaelementtejä.



Kuva dp.2 Tappien ja sauvojen tiheys oikeassa silmässä



Kuva dp.3 Kohteen kuvan muodostuminen silmässä.

## KUVAN MUODOSTUMINEN SILMÄSSÄ

Silmän linssi käyttäytyy kuin mikä tahansa linssi. Ainoa ero on, että silmän polttoväli muuttuu riippuen kohteen etäisyydestä. Mykiön optisen keskipisteen ja keskuskuopan välinen etäisyys vaihtelee n. 14 ja 17 mm:n välillä riippuen linssin kuperuudesta. Paksuimmillaan linssi on lähelle katsottaessa. Katsottaessa kohteita, jiden etäisyys on yli 3 m, linssin paksuus on ohuimmillaan. Kohteen kuva muodostuu pääasiassa keskuskuopan alueelle.

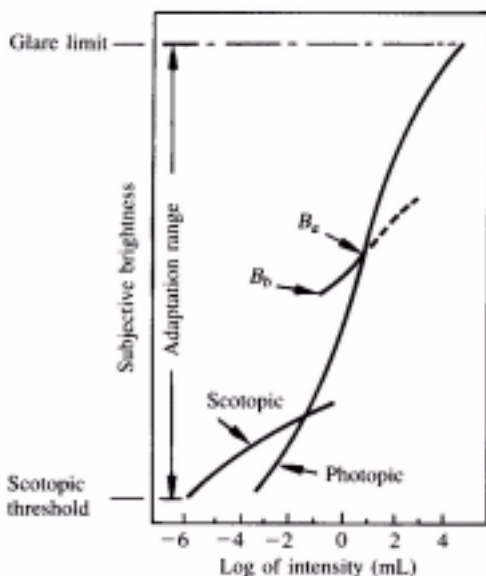
Kuvassa dp.3 on esimerkki, jossa katsotaan 15 m korkeaa puuta, jonka etäisyys silmästä on 100 m. Merkitään  $x$ :llä silmän takaosaan muodostuneen kuvan korkeutta. Kuvan dp.3 geometrisilla mitoilla silmään muodostuneen kuvan korkeus on

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{17} \quad \Rightarrow \quad x = 2,55 \text{ mm}$$

Kuten nähdään kuva on muodostunut lähes kokonaan tarkan näön alueelle.

## ADAPTOITUMINEN KIRKKAUTEEN JA EROTTELUKYKY

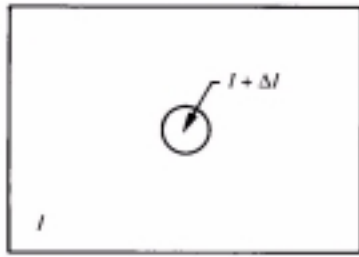
Koska digitaalinen kuva on kvantisoitu myös kirkkaustasojen suhteen, on silmän kyky erottaa eri kirkkaustasoja myös tärkeä.



Ihmisen silmän adaptoitumiskyky näkökynnyksestä palokynnykseen on valtava. Suhde on n.  $10^{10}$ . Ihmisen kokema subjektiivinen kirkkaus on logaritmisessa suhteessa absoluuttiseen kirkkauteen.

Kuvassa dp.4 on kuvattu ihmisen kokema kirkkaus absoluuttisuuden kirkkauden funktiona. Pitkä yhtenäinen käyrä kuvaa sen alueen, johon ihmissilmä adaptoituu.

Kuva dp.4 Ihmisen näön adaptoitumisalue



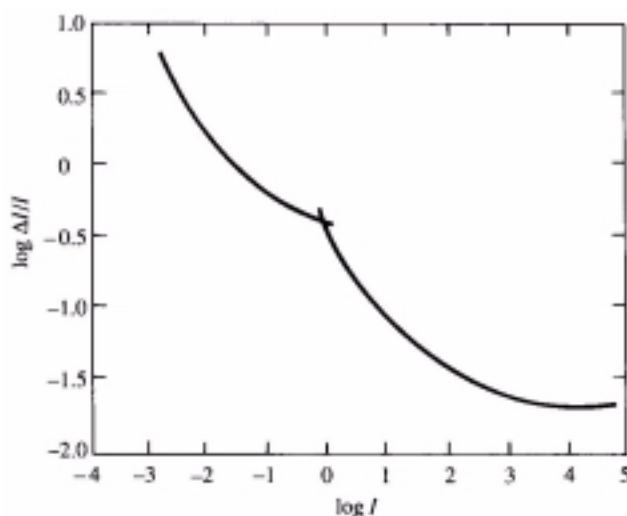
Kuva dp.5 Koejärjestely kirkkauden muutosten havaitsemiseen

Ihmisen näkö ei voi käsitellä samanaikaisesti koko kirkkausaluetta, vaan se adaptoituu johonkin tasoon (kirkkauden adaptoitumistaso). Tällä adaptoitumistasolla silmä ei voi käsitellä kovin suurta kirkkausaluetta. Kuvassa dp.4 erästä tällaista tasoa on kuvattu käyrällä  $B$ . Tason  $B_b$  alapuolella olevat tasot koetaan mustana. Tason  $B_a$  yläpuoliset tasot kyllä nähdään, mutta ne aiheuttavat uuden adaptoitumisen.

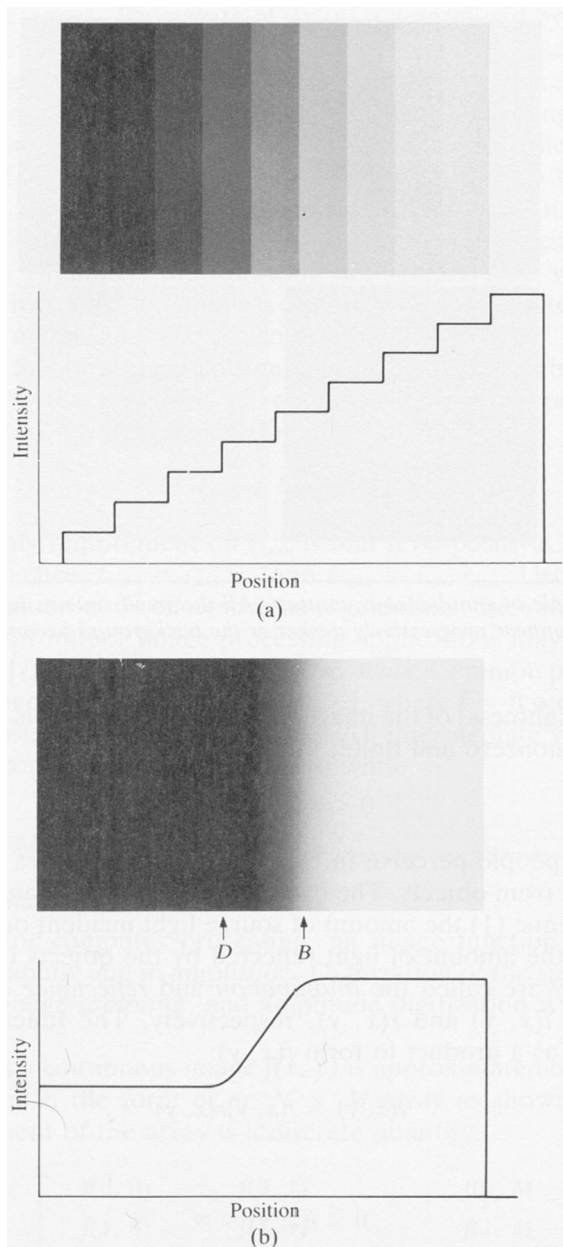
Ihmisen kyky havaita kirkkauden muutoksia millä tahansa adaptoitumistasolla on kuvankäsittelyn kannalta merkittävä. Kuvassa dp.5 on kuvattu koejärjestely, jolla tutkitaan kirkkauserojen havaitsemista. Kuvan järjestelyssä on riittävän suuri koko näköaleen kattava mattalasi, jota valaistetaan tasaisesti takaapäin intensiteetillä  $I$ . Kuvan keskeisen osan intensiteettiä muutetaan hetkellisesti (välähdys) määrällä  $\Delta I$ . Suhdetta  $\Delta I/I$ , jossa  $\Delta I$  on 50 % suurempi taustakirkkautta, sanotaan Weberin suhteeksi.

Kuvassa dp.6 on yleinen kirkkauden erotuskynnys. Kuvasta nähdään se tosiasia, että kirkkausien erotuskynnys on suuri hämärässä ja vastaavasti paranee kirkkauden lisääntyessä. Käyrän kaksiosainen muoto tulee siitä, että hämärässä toimivat sauvat ja kirkkaammassa valaistuksessa tapit.

Seuraavassa testissä taustavalaistus pidetään vakiona ja toisen lähteen kirkkauden annetaan muuttua tasosta, jota ei koskaan havaita, tasoon, joka havaitaan aina. Tällöin tyypillinen havaitsija erottaa kahdestatoista 24:ään eri harmaasävyä. Tämä ei tarkoita, että kuvat voitaisiin esittää vain muutamalla harmaatasolla. Käytännössä kuvan taustan kirkkaus vaihtelee ja jokaisella tasolla voidaan erottaa maksimissaan 24 harmaatasoa. Nyt kuitenkin kokonaistasojen määrä on kasvanut merkittävästi. Mikäli kuva esitetään yhdestä kahteen tusinaan harmaatasolle, havaitaan kynnystysilmiö.

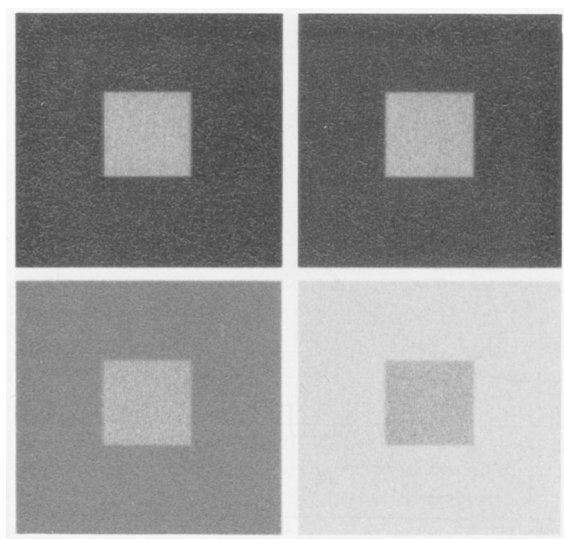


Kuva dp.6 Tyypillisiä Weber-suhteita intensiteetin funktiona.



*Kuva dp.7 Kaksi esimerkkiä, jotka osoittavat, että havaittu kirkkaus ei ole yksinkertainen intensiteetin funktio.*

Seuraavaksi tarkastellaan kahta ilmiötä, jotka osoittavat, että havaittu kirkkaus ei ole yksinkertainen intensiteetin funktio. Kuva dp.7 perustuu sille tosiasialle, että ihmisen visuaalisella havaintokyvyllä on taipumus ylityksiin ja alituksiin. Kuvan dp.7 a-kohdassa intensiteetti on tasainen jokaisessa portaassa. Kuitenkin todetaan, että portaan reunalla kuvan kirkkaus muuttuu. Kuvan b-kohdassa on ns. Mach band kuvio. Kirkkausprofiilin mukaan kuvan kirkkaus on tasainen ja muutoskohdassa muutos on tasainen. Kuitenkin D-kohdassa havaitaan tummempi raita ja B-kohdassa vastaavasti vaalea raita.



Toinen ilmiö on samanaikainen kontrasti. Tässä tapauksessa alueen koettu kirkkaus ei riipu vain intensiteetistä kuten kuvassa dp.8 osoitetaan. Kuvassa kaikkien keskineliöiden intensiteetti on sama. Kuitenkin näennäinen kirkkaus vaihtelee taustan kirkkauden mukaan.

*Kuva dp.8 Esimerkki samanaikaisesta kontrastista.*



## YKSINKERTAINEN KUVAMALLI

Termi kuva viittaa kaksiulotteiseen valon intensiteettifunktioon  $f(x, y)$ , jossa  $f$ :n arvo spatiaalisessa koordinaatissa  $(x, y)$  on valon intensiteetti tässä pisteessä. Valo on eräs energian muoto ja niinollen  $f(x, y)$  täytyy olla erisuuri kuin nolla ja äärellinen, joten

$$0 < f(x, y) < \infty \quad (\text{dp.1})$$

Funktiota  $f(x, y)$  kuvaavat seuraavat perusominaisuudet

\*\* valaistus  $i(x, y)$ , joka kohdistuu kohteeseen

\*\* heijastuskerroin  $r(x, y)$ , joka kertoo kohteesta heijastuneen valon suhteessa valaisuun

Funktiot  $i(x, y)$  ja  $r(x, y)$  yhdessä muodostavat funktion  $f(x, y)$

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (\text{dp.2})$$

jossa

$$0 < i(x, y) < \infty \quad (\text{dp.3})$$

ja

$$0 < r(x, y) < 1 \quad (\text{dp.4})$$

Heijastuskerrointa rajoittavat 0, joka merkitsee täydellistä absorptiota, ja 1, joka merkitsee täydellistä heijastusta. Valaistusfunktion  $i(x, y)$  luonne riippuu voimakkaasti valolähteestä.

Yhtälöt (dp.3) ja (dp.4) antavat teoreettiset rajat. Käytännössä funktiolle  $i(x, y)$  esiintyy seuraavia keskiarvoja. Kirkkaalla ilmalla auringonpaisteessa valaistusvoimakkuus on 100000 luksia<sup>1</sup>, lx. Pilvisellä päivällä valaistus on n. 10000 lx ja täysikuu valaisee 0,2 lx voimakkuudella. Lukeminen ja kirjoitus vaativat 300...500 lx, käsityöt 1000 lx ja tarkka piirtäminen 2000 lx. Heijastuskerroin  $r(x, y)$  on n. 0,01 mustalle sametille, 0,65 ruostumattomalle teräkselle, 0,80 valkoiselle seinämaalille, 0,90 hopeoidulle metallille ja 0,93 lumelle.

Jatkossa mustavalkoisen kuvan intensitettiä  $f$  koordinaatissa  $(x, y)$  sanotaan harmaatasoksi  $l$  tässä pisteessä. On ilmeistä, että harmaataso on välillä

$$L_{\min} \leq l \leq L_{\max} \quad (\text{dp.5})$$

$L_{\min}$  :n tulee olla positiivinen ja  $L_{\max}$  :n äärellinen. Käytännössä  $L_{\min} = i_{\min} r_{\min}$  ja  $L_{\max} = i_{\max} r_{\max}$  ja likiarvoina sisävalaistuksessa  $L_{\min} \approx 0,01$  ja  $L_{\max} \approx 10000$ .

Väliä  $[L_{\min}, L_{\max}]$  sanotaan harmaa-asteikoksi. Tavallisesti väli siirretään numeerisesti välille  $[0, L]$ , jossa  $l = 0$  vastaa mustaa ja  $l = L$  on asteikon valkoinen. Kaikki muut väliarvot ovat harmaan sävyjä, jotka muuttuvat jatkuvasti mustasta valkoiseen.

<sup>1</sup> Kirjassa esiintyy yksikkö foot-candle, jolle saadaan yhtäläisyys 1 foot-candle = 10,74 lx.

## NÄYTTEENOTTO JA KVANTISOINTI

Jotta kuva olisi tietoneessa käsiteltävässä muodossa, on se digitoitava sekä spatiaalitasossa että kirkkaustasossa. Digitointia spatiaalisissa koordinaateissa  $f(x, y)$  sanotaan kuvan näytteenotoksi ja kirkkaustasojen digitointia sanotaan harmaataso kvantisoinniksi.

Oletetaan, että jatkuvaa funktiota  $f(x, y)$  aproksimoidaan tasavälein olevin näyttein, jotka on järjestetty  $N \times M$  matriisin muotoon, jossa jokainen elementti on diskreetti arvo

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0, M-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1, M-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \cdots & f(N-1, M-1) \end{bmatrix} \quad (\text{dp.6})$$

Yhtälön (dp.6) oikea puoli on esitystapa, josta läytetään yleisesti nimitystä digitaalinen kuva. Jokaisesta matriisin elementistä käytetään nimitystä kuvaelementti, pikseli tai pel. Jatkossa käytetään nimityksiä kuva ja pikseli digitaalisesta kuvasta ja sen elementeistä.

Digitointiprosessissa joudutaan päättämään arvot  $N$ :lle ja  $M$ :lle ja harmaatasojen määrä. Yleinen käytäntö digitaalisessa kuvankäsittelyssä on, että  $N$ ,  $M$  ja harmaatasojen määrä  $G$  ovat kahden kokonaisluku potensseja.

$$N = 2^n, \quad M = 2^k \quad (\text{dp.7})$$

ja

$$G = 2^m \quad (\text{dp.8})$$

Jatkossa oletetaan, että harmaatasojen digitointiin käytetään lineaarista kvantisointia välillä 0 ja  $L$ . Yhtälöiden (dp.7) ja (dp.8) perusteella voidaan laskea digitaalisen kuvan tallentamiseen tarvittavien muistipaikkojen määrä ja kuvan vaatimien bittien määrä  $b$ .

$$b = N \times M \times m \quad (\text{dp.9})$$

Jos  $N = M$

$$b = N^2 m \quad (\text{dp.10})$$

Esimerkiksi  $128 \times 128$  kuva, joka on kvantisoitu 64 harmaatasoon, vaatii 98.304 bittiä ja muistipaikkaa. Taulukkoon dp.1 on kerätty joitakin tyypillisiä  $N$ :n ja  $m$ :n arvoja.

Taulukko db.1 Eräiden kuvien vaatima muistopaikkojen määrä

| $N \backslash m$ | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 32               | 1,024     | 2,048     | 3,072     | 4,096     | 5,120     | 6,144     | 7,168     | 8,192     |
| 64               | 4,096     | 8,192     | 12,288    | 16,384    | 20,480    | 24,576    | 28,672    | 32,768    |
| 128              | 16,384    | 32,768    | 49,152    | 65,536    | 81,920    | 98,304    | 114,688   | 131,072   |
| 256              | 65,536    | 131,072   | 196,608   | 262,144   | 327,680   | 393,216   | 458,752   | 524,288   |
| 512              | 262,144   | 524,288   | 786,432   | 1,048,576 | 1,310,720 | 1,572,864 | 1,835,008 | 2,097,152 |
| 1,024            | 1,048,576 | 2,097,152 | 3,145,728 | 4,194,304 | 5,242,880 | 6,291,456 | 7,340,032 | 8,388,608 |

Taulukko dp.2 Taulukon dp.1 bittimäärät muutettu tavuiksi

| $N \backslash m$ | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8         |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 32               | 128     | 256     | 512     | 512     | 1,024   | 1,024   | 1,024   | 1,024     |
| 64               | 512     | 1,024   | 2,048   | 2,048   | 4,096   | 4,096   | 4,096   | 4,096     |
| 128              | 2,048   | 4,096   | 8,192   | 8,192   | 16,384  | 16,384  | 16,384  | 16,384    |
| 256              | 8,192   | 16,384  | 32,768  | 32,768  | 65,536  | 65,536  | 65,536  | 65,536    |
| 512              | 32,768  | 65,536  | 131,072 | 131,072 | 262,144 | 262,144 | 262,144 | 262,144   |
| 1,024            | 131,072 | 262,144 | 393,216 | 524,288 | 655,360 | 786,432 | 917,504 | 1,048,576 |

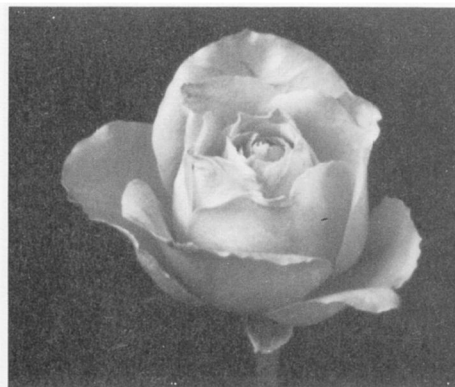
Koska digitaalinen kuva on aproksimaatio jatkuvasta kuvasta, niin paljonko tarvitaan pikseleitä ja kuinka montaa harmaatasoa tarvitaan hyvään likiarvoon. Kuvan tarkkuus riippuu voimakkaasti näistä kahdesta parametrilla. Mitä suurempia arvoja nämä parametrit saavat, sitä lähempänä ollaan alkuperäistä kuvaa. Toisaalta tarvittava muistin määrä ja prosessoinnin vaatimukset kasvavat nopeasti  $N$ ,  $M$  ja  $m$ :n funktiona.

Perustuen edelläoleviin kommentteihin ja oletetaan neliömäinen kuva, jossa  $N = M$ , tutkitaan kuvan laatua parametrien  $N$  ja  $m$  suhteen. Hyvän kuvan määrittely on vaikeaa, sillä se riippuu subjektiivisista tekijöistä ja kuvan käyttötarkoituksesta. Tässä ollaan kiinnostuneita luomaan yleinen käsitys näiden parametrien vaikutuksesta.

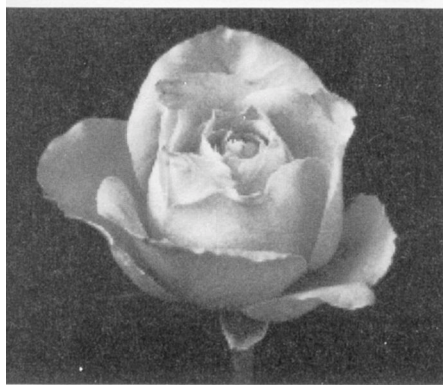
Kuvassa dp.9 a on  $1024 \times 1024$  digitaalinen kuva ruususta. Muissa kuvasarjan kuvissa spatiaalinen resoluutio  $N = 512, 256, 128, 64, 32$ . Kaikissa tapauksissa maksimi harmaatasojen määrä on 256.



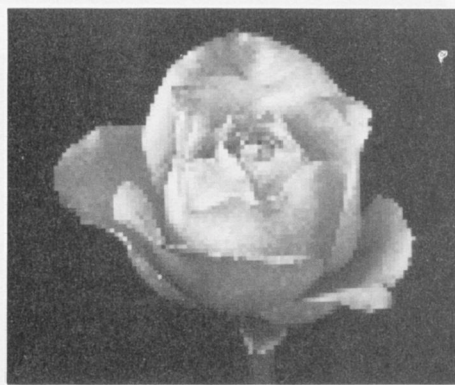
(a)



(b)

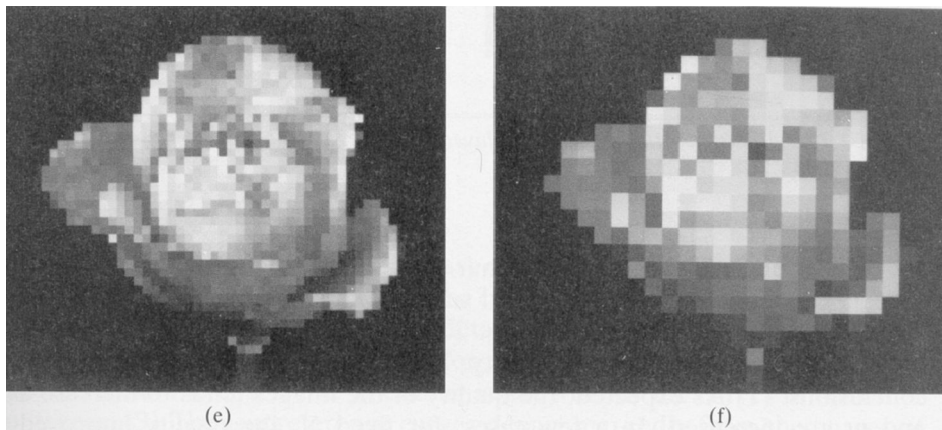


(c)



(d)

Kuva dp.9 Spatiaalisen resoluution vaikutus kuvaan

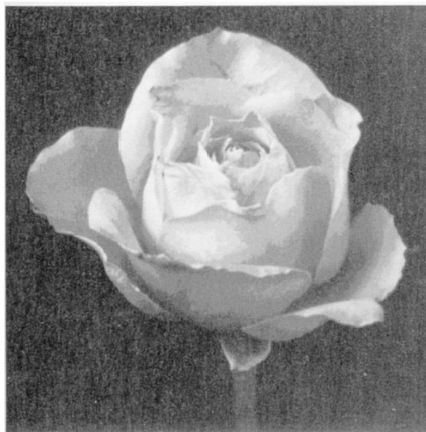
*Kuva dp.9 (jatko)*

Kuvassa dp.10 muutetaan harmaatasojen määriä alkaen 256 ja päätyen 2:een. Kaikissa kuvissa on sama  $1024 \times 1024$  spatiaalinen resoluutio.

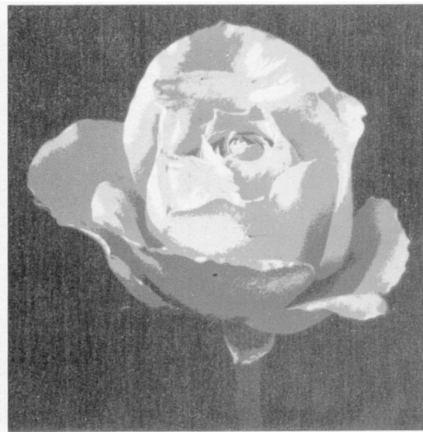
*Kuva dp.10  
Harmaatasojen  
määrän vaikutus  
kuvan laatuun*

Edellä on tarkasteltu parametrien  $N$  ja  $m$  vaikutusta erikseen. Tämä on kuitenkin vain puolet vastausta kysymykseen näiden parametrien vaikutuksesta kuvan laatuun, koska yhteisvaikutusta ei ole tutkittu. Huang on tutkinut yhteisvaikutusta. Koe käsitti joukon subjektiivisia testejä kuvilla, joissa oli vähän ja paljon yksityiskohtia ja kuvan näiden ääripäiden väliltä. Naisen kasvot edustavat vähän yksityiskohtia sisältävää kuvaa. Kameramies on keskiväliltä ja yleisöjoukko edustaa paljon yksityiskohtia sisältävää kuvaa.

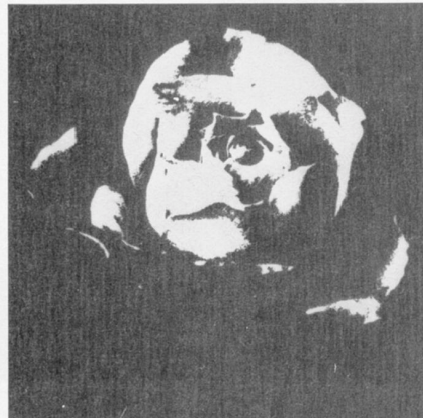
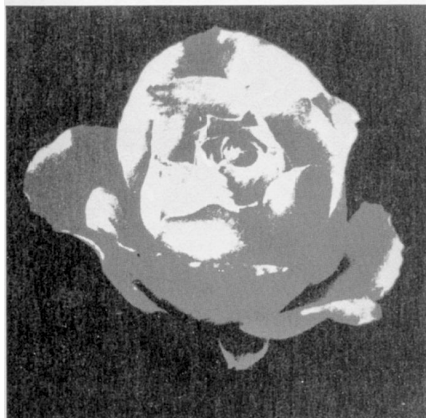




(e)



(f)

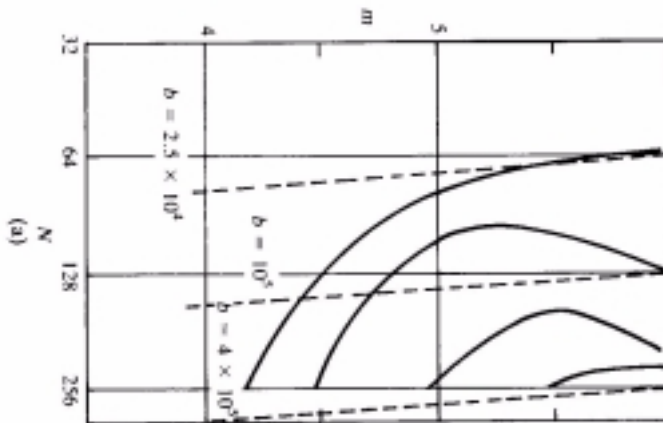


*Kuva dp.10 (jatkoa)*

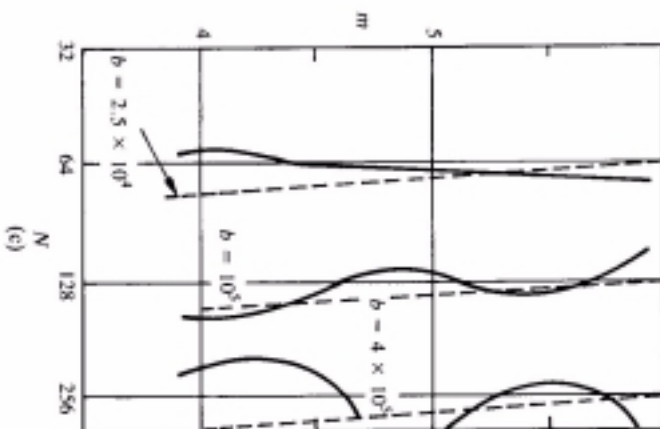
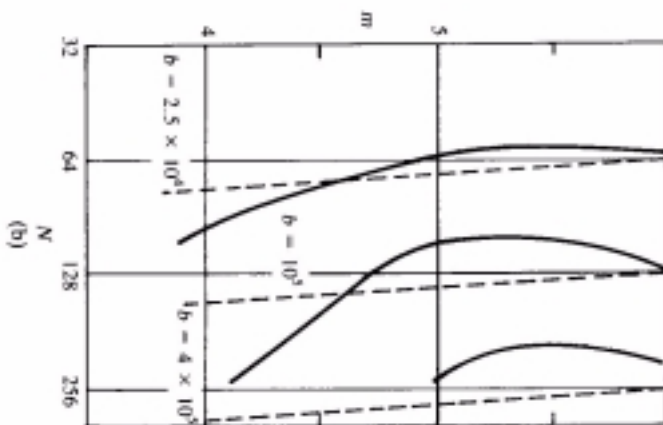


*Kuva dp.11 Harmaa-  
tasojen ja spatiaalisen  
resoluution yhteis-  
vaikutuksen tutkimiseen  
käytettyjä kuvia*

Näistä kuvista kehitettiin testikuvat vaihtelemalla  $N$ :ää ja  $m$ :ää. Tulokset on esitetty kuvassa dp.12. Vähän yksityiskohtia sisältävän kuvan tulokset ovat a-kohdassa, kameramieskuvan tulokset b-kohdassa ja väkijoukon c-kohdassa. Käyrät on järjestetty paremmuusjärjestykseen vasemmalta oikealle. Käyrät kuvaavat subjektiivisesti samanlaatuisia kuvia. Kuten odotettua, kun sekä spatiaalinen että harmaatasoresoluutio paranevat, myös kuvien subjektiivinen laatu paranee. Tähän on joitakin poikkeuksia. Kasvokuvassa harmaatasojen määrän vähentäminen jopa parantaa laatua. Tämä selittyy sillä, että harmaatasojen vähentäminen parantaa kuvan kontrastia.



Toinen merkittävä piirre on, että yksityiskohtien lisääntyessä harmaatasojen määrän vaikutus heikkenee. Tästä voidaan vetää johtopäätös, että yksityiskohtien lisääntyessä harmaatasojen määrää voidaan vähentää.



Kuva dp.12 Parametrien  $N$  ja  $m$  muutosten yhteisvaikutus.

## EPÄLINEAARINEN NÄYTTEENOTTO JA KVANTISOINTI

Digitaalisen kuvan laatua voidaan parantaa epälineaarisella kvantisoinnilla, joka riippuu kuvan sisällöstä. Varsinkin jyrkissä harmaatason muutoskohdissa tarvitaan hienompaa näytteenottorasteria kuin laajoilla tasaisilla alueilla. Esimerkiksi kuvassa olevat kasvit voidaan näytteistää tiheämmin kuin tausta. Samoin raja-alueet kasvojen ja taustan välillä.

Epälineaarisesti näytteistetyistä kuvasta on vaikea ilmaista rajoja. Menetelmä on myös tehoton silloin kun kuva sisältää paljon pieniä yksityiskohtia kuten väkijoukkokuva.

Kun harmaatasojen määrä halutaan pitää pienenä, epälineaarinen kvantisointi tarjoaa tähän hyvän mahdollisuuden. Menetelmässä voidaan jakaa harmaatasoja tarpeen mukaan. Transitiokohdissa havaitaan vähän harmaatasoja. Tällöin säästyneet tasot voidaan käyttää tasaisille pinnoille, joissa liian karkea kvantisointi aiheuttaa selvien rajojen esiintymistä.

Edellä kuvattua menetelmää edeltää rajojen ilmaisu. Toinen mahdollinen menetelmä on tutkia eri harmaatasojen esiintymistiheys. Jos jokin harmaataso esiintyy usein, niin se kvantisoidaan pienin tasoeroin. Vastaavasti harvoin esiintyvä taso kvantisoidaan karkeasti.

## PIKSELIN SUHTEITA

Tässä jaksossa kuvataan muutama yksinkertainen mutta merkittävä pikselien välinen syhde. Aikaisemman perusteella digitaalinen kuva määritellään  $f(x, y)$ . Viitattaessa yksittäiseen määrittäytyyn pikseliin, käytetään pieniä kirjaimia kuten  $p$  ja  $q$ . Kuvan  $f(x, y)$  pikselien alijoukosta käytetään merkintää  $S$ .

## PIKSELIN NAAPURIT

Pikselillä  $p$ , jonka koordinaatit ovat  $(x, y)$ , on neljä horisonttaalista ja vertikaalista naapuria, joiden koordinaatit ovat

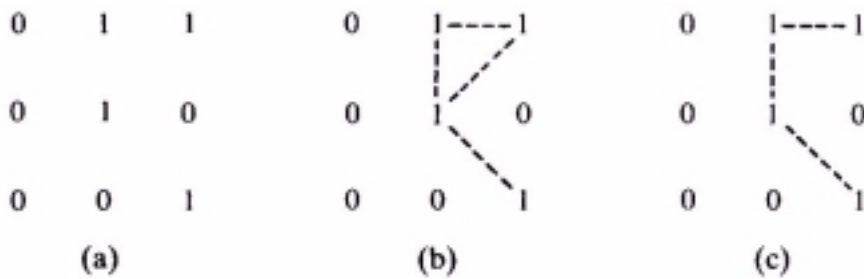
$$(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1).$$

Tätä pikseliryhmää sanotaan pikselin  $p$  4-naapureiksi ja siitä käytetään merkintää  $N_4(p)$ . Jokainen naapuripikseli on yhden yksikön etäisyydellä pikselistä  $(x, y)$ . Jos pikseli  $p$  on kuvan rajalla, jotkut sen naapureista on kuvan ulkopuolella.

Neljä pikselin  $p$  lävistäjänaapuria ovat koordinaateissa

$$(x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)$$

yhdessä 4-naapureiden kanssa sanotaan 8-naapuriksi ja niistä käytetään merkintää  $N_8(p)$ . Kuten aikaisemminkin, jotkut  $N_D(p)$  ja  $N_8(p)$  naapureista voivat olla kuvan ulkopuolella, jos pikseli  $(x, y)$  on kuvan rajalla.



Kuva dp.13 Pikselien järjestely (a), keskipikselin 8-naapurit (b) ja saman pikselin m-naapurit

## KYTKEYTYMINEN

Pikselien välinen kytkeytyminen on tärkeää muodostettaessa rajoja ja alueita kuvassa. Jotta kaksi pikseliä olisivat kytkeytyneet, niiden on oltava jossakin mielessä viereisiä (esim 4-naapureita) ja niiden harmaatasojen on täytettävä asetetut samanlaisuuden vaatimukset (esimerkiksi tasot ovat samat). Esimerkiksi binäärikuvassa, jossa pikseli voi saada arvot 0 tai 1, pikselit voivat olla 4-naapurit, mutta ne ovat kytkeytyneet vain, jos niillä on sama arvo, 0 tai 1.

Merkitään sitä harmaatasojoukkoa, jolla harmaatasokuvan pikselien kytkeytyminen on määritelty,  $V$ :llä. Tällöin voidaan erottaa kolme erilaista kytkeytymisen tyyppiä.

- \*\* **4-kytkeytyminen**. Kaksi pikseliä  $p$  ja  $q$ , joiden harmaataso on  $V$ , ovat 4-kytketyt, jos  $q$  on joukossa  $N_4(p)$ .
- \*\* **8-kytkeytyminen**. Pikselit  $p$  ja  $q$ , joiden harmaatasot ovat  $V$ , ovat 8-kytkeytyneet, jos  $q$  on joukossa  $N_8(p)$ .
- \*\* **m-kytkeytyminen** (yhdistetty kytkeytyminen). Pikselit  $p$  ja  $q$ , joiden harmaatasot ovat joukossa  $V$ , ovat m-kytkeytyneet, jos
  1.  $q$  on joukossa  $N_4(p)$ , tai
  2.  $q$  on joukossa  $N_D(p)$  ja joukko  $N_4(p) \cap N_4(q)$  on tyhjä.

Yhdistetty kytkeytyminen on muunnos 8-kytkeytymisestä ja on tarkoitettu estämään monitiekytkeytymiset käytettäessä 8-kytkeytymistä. Tästä on esimerkki kuvassa dp.13, jossa on binäärikuvan pikseleitä. Kuvan a-kohdassa on pikselien arvojen sijoittuminen ja b-kuvassa on pikselien kytkennät esitetty katkoviivalla, kun  $V = \{1\}$ . Sallittaessa 8-kytkeytyminen nähdään pikselien välillä useammankertaisia polkuja. Ylimääräiset kytkeytymispolut on eliminoitu c-kuvassa käyttämällä m-kytkeytymistä.

Pikseli  $p$  on pikselin  $q$  viereinen pikseli, jos ne ovat kytketyt. Voidaan määritellä 4-, 8- ja m-viereisyys riippuen kytkeytymisestä. Kuvan kaksi pikselien alajoukkoa  $S_1$  ja  $S_2$  ovat viereisiä, jos jokin  $S_1$ :n pikseli on viereinen jonkin  $S_2$ :n pikselin kanssa.

Polku pikselistä  $p$ , jonka koordinaatit ovat  $(x, y)$ , pikseliin  $q$ , jonka koordinaatit ovat  $(s, t)$ , on pikselien sekvenssi, joiden koordinaatit ovat

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$



jossa  $(x_0, y_0) = (x, y)$  ja  $(x_n, y_n) = (s, t)$ . Pikseli  $(x_i, y_i)$  on viereinen pikselille  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  kun  $1 \leq i \leq n$  ja  $n$  on polun pituus.

Jos pikselit  $p$  ja  $q$  kuuluvat kuvan pikselien alajoukkoon  $S$ , silloin  $p$  on kytkeyty  $q$ :n joukossa  $S$ , jos on olemassa polku näiden pikselien välillä joukossa  $S$ . Kaikki pikseliin  $p$  kytketyt pikselit muodostavat  $S$ : **kytketyn komponentin**. Toisin sanoen mitkä tahansa kaksi pikseliä, jotka kuuluvat kytkettyyn komponenttiin, on kytketty kaikkiin muihin kytketyn komponentin pikseleihin.

Mahdollisuus osoittaa erilaisia merkityksiä kytketylle komponentille muodostaa perustan automaattiselle kuvan analysoinnille.

## KYTKETTYJEN KOMPONENTTIEN NIMEÄMINEN

Kuvitellaan, että kuvaa skannataan pikseli pikseliltä vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas ja olemme kiinnostuneita 4-kytketyistä komponenteista. Oletetaan, että  $p$  on juuri scannattava pikseli ja  $r$  on sen yläpuolinen pikseli ja  $t$  vasemmanpuoleinen. Skannauksen luonteesta johtuen pikselin  $p$  4-naapurit  $r$  ja  $t$  on jo skannattu ja nimetty mikäli ne ovat ykkösiä.

Pikselin  $p$  kohdalla käydään läpi seuraava proseduri

- \*\* jos  $p = 0$ , siirrytään seuraavaan pikseliin
- \*\* jos  $p = 1$ , tutkitaan pikselit  $r$  ja  $t$ 
  - \*\* jos molemmat ovat nollija, annetaan  $p$ :lle uusi nimi
  - \*\* jos jompikumpi naapuri on 1, nimetään  $p$  naapuripikselin mukaa
  - \*\* jos molemmat naapurit ovat ykkösiä ja niillä on sama nimi, annetaan tämä nimi myös  $p$ :lle
  - \*\* jos molemmat naapurit ovat ykkösiä ja niillä on eri nimi, annetaan  $p$ :lle toisen nimi ja tehdään huomautus, että nämä kaksi nimeä ovat ekvivalentit ( $r$  ja  $t$  ovat kytketyt  $p$ :n kautta).

Skannauksen päätyttyä kaikki arvot yksi omaavat pikselit on nimetty, joista jotkut ovat ekvivalentteja. Tämän jälkeen lajitellaan ekvivalentit nimet ekvivalentteihin luokkiin ja annetaan eri nimet kullekin luokalle. Seuraavaksi kuva käydään läpi uudelleen ja korvataan nimet ekvivalenttien luokkien nimillä.

Nimettäessä 8-kytkettyjä komponentteja, menetellään vastaavasti, mutta myös ylemmät kaksi diagonaalinaapuria  $q$  ja  $s$  tutkitaan. Myös tässä tapauksessa tutkittaessa pikseliä  $p$ , on pikselit  $r$ ,  $t$ ,  $q$  ja  $s$  jo prosessoitu. Algoritmi on seuraava

- \*\* jos  $p = 0$ , siirrytään seuraavaan pikseliin
- \*\* jos  $p = 1$ , tutkitaan pikselit  $r$ ,  $t$ ,  $q$  ja  $s$ 
  - \*\* jos kaikki ovat nollija, annetaan  $p$ :lle uusi nimi
  - \*\* jos jokin naapuri on 1, nimetään  $p$  naapuripikselin mukaa
  - \*\* jos kaksi tai useampia naapureista on ykkösiä ja niillä on sama nimi, annetaan tämä nimi myös  $p$ :lle
  - \*\* jos kaksi tai useampia naapureista on ykkösiä ja niillä on eri nimi, annetaan  $p$ :lle jonkin naapurin nimi ja tehdään merkintä ekvivalenssista.

Skannauksen päätteeksi ryhmitellään ekvivalentit nimet ekvivalenteiksi luokiksi annetaan niille nimet. Lopuksi ekvivalentit nimet korvataan ekvivalenttien luokkien nimillä.

## SUHTEET, EKVIVALENSSI JA TRANSITIIVINEN SULKEUMA

Edellä on tarkasteltu pikselien välisiä syhteita ja ekvivalensseja. Seuraavaksi tarkastellaan lyhyesti joitakin yksinkertaisia konsepteja, jotka perustuvat pikselien suhteisiin ja ekvivalensseihin.

Binäärisuhde<sup>1</sup>  $R$  joukossa  $A$  on elementtiparien joukko  $A$ :ssa. Jos parilla  $(a, b)$  on suhde  $R$ , käytetään tästä usein merkintää  $aRb$ .

Esimerkiksi

Joukko  $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  on järjestynyt seuraavasti

$$\begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ p_3 & \\ & p_4 \end{array}$$

ja tarkastellaan 4-kytkettyjä suhteita. Tässä tapauksessa  $R$  on joukko  $A$ :ssa olevia 4-kytkettyjä pisteitä  $R = \{(p_1, p_2), (p_2, p_1), (p_1, p_3), (p_3, p_1)\}$ . Siten  $p_1$  on suhteessa  $p_2$ :een,  $p_1$   $p_3$ :een ja päinvastoin mutta  $p_4$  ei ole missään suhteessa muihin 4-kytkeytymisen mielessä.

Binäärisuhteen  $R$  joukossa  $A$  sanotaan olevan

\*\* reflektiivinen, jos jokainen  $a$  joukossa  $A$  on  $aRa$

\*\* symmetrinen, jos jokainen  $a$  ja  $b$  joukossa  $A$ , kun  $aRb$  on myös  $bRa$

\*\* transitiivinen, jos  $a, b$  ja  $c$  jotka kuuluvat joukkoon  $A$ , jos  $aRb$  ja  $bRc$  seuraa  $aRb$

Jos suhde täyttää kaikki kolme ominaisuutta, sitä sanotaan ekvivalenttiseksi suhteeksi. Jos  $R$  on ekvivalenttinen suhde joukossa  $A$ , silloin  $A$  voidaan jakaa  $k$ :n erilliseen alijoukkoon, joita sanotaan ekvivalenteiksi luokiksi niin, että  $aRb$  vain jos  $a$  ja  $b$  kuuluvat samaan alijoukkoon. Usein käyttökelpoinen tapa on kirjoittaa suhteet binäärimatriisin muotoon.

**Esimerkiksi** oletetaan, että  $R = \{(a, a), (a, b), (b, d), (c, e)\}$ , tällöin

$$B = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

<sup>1</sup> Tässä tapauksessa binääri viittaa binääriluvub digittiin eikä sillä ole tekemistä binäärikuvan kanssa.

jossa on sijoitettu ykkönen niihin paikkoihin, joissa elementeillä on suhde ja muualle nolla. Jos suhde on reflektiivinen niin silloin kaikki diagonaalilla olevat elementit ovat ykkösiä. Jos  $R$  on symmetrinen, matriisikin on symmetrinen.

Kuten aikaisemmin todettiin niin transitiivisuudesta seuraa, että jos  $aRb$  ja  $bRc$  niin silloin myös  $aRc$ . Edellisessä esimerkissä  $a$  on suhteessa  $b$ :hen ja  $b$  vuorostaan  $d$ :hen, mutta  $a$  ei ole suhteessa  $d$ :hen. Joukkoa, joka pitää sisällään transitiivisuudesta johtuvat ”johdetut” suhteet, sanotaan  $R$ :n transitiiviseksi sulkeumaksi ja sitä merkitään  $R^+$ . Tässä tapauksessa  $R^+ = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (d, b), (d, d), (c, e)\}$ . Joukossa ovat myös parit  $(b, b)$  ja  $(d, d)$ , joka johtuu transitiivisuuden määritelmästä. Kun on  $bRd$  ja  $dRb$ , niin on myös  $bRb$  ja edelleen kun on  $dRb$  ja  $bRd$ , niin näistä seuraa  $dRd$ . Matriisimuodossa tulos on

$$B^+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$B^+$ -matriisi voidaan laskea suoraan  $B$ -matriisista. Oletetaan, että  $B$  on  $n \times n$  matriisi, jolloin

$$B^+ = B + BB + BBB + \dots + B^n \quad (\text{dp.1})$$

Matriisioperaatiot suoritetaan normaalisti paitsi, että kertolaskut korvataan loogisilla AND-operaatioilla ja yhteenlaskut loogisilla OR-operaatioilla. Yhtälön (dp.1) laskenta vaatii  $n^3$  AND- ja OR-operaatiota.  $B^+$ -matriisin laskemiseksi on kehitetty algoritmi, joka vaatii vain OR-operaatioita  $B$ -matriisin ykköselementtien välillä.

1. aseta  $j = 1$
2. for  $i = 1, 2, \dots, n$ . jos  $b(i, j) = 1$ , silloin for  $k = 1, 2, \dots, n$ , korvaa  $b(i, k) = b(i, k) + b(j, k)$ .
3. lisää  $j$ :hin yksi
4. jos  $j \leq n$ , palaa kohtaan 2, muulloin jatka kohtaan 5.
5. Algoritmi päättyy. Matriisi  $B$  on korvautunut matriisilla  $B^+$ .

## PIKSELIEN VÄLINEN ETÄISYYS

Pikselien  $p$ ,  $q$  ja  $z$ , joiden koordinaatit ovat vastaavasti  $(x, y)$ ,  $(s, t)$  ja  $(u, v)$ , välisellä etäisyydellä  $D$  on seuraavia ominaisuuksia

$$\begin{aligned} D(p, q) &\geq 0, D(p, q) = 0 \text{ vain jos } p = q, \\ D(p, q) &= D(q, p) \text{ ja} \\ D(p, z) &\geq D(p, q) + D(q, z). \end{aligned}$$

Pikseleiden  $p$  ja  $q$  välinen Euklidinen etäisyys määritellään

$$D_e(p, q) = \sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2} \quad (\text{dp.2})$$

Tällä tavalla määriteltäessä pikselien, joiden etäisyys pisteestä  $(x, y)$  on  $r$  tai pienempi, sijaitsevat ympyräkielellä, jonka säde on  $r$  ja keskipiste  $(x, y)$ .

$D_4$ -etäisyys, josta käytetään myös nimitystä kortteli-etäisyys, määritellään seuraavasti

$$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t| \quad (\text{dp.3})$$

Tässä tapauksessa pikselit, jotka ovat  $D_4$ -etäisyydellä  $r$  koordinaateista  $(x, y)$ , sijaitsevat vinoneliön kehällä.

### Esimerkki

Tarkastellaan pikseleitä joiden  $D_4$ -etäisyys pikselistä  $p(x, y)$  on yhtäsuuri tai pienempi kuin kaksi, tällöin

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 2 & 1 & 2 & \\ 2 & 1 & p & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 2 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Pikselit, joiden  $D_4 = 1$ , ovat  $p$ :n 4-naapureita.

$D_8$ -etäisyys, jota sanotaan myös shakkilauta-etäisyydeksi, pikselien  $p$  ja  $q$  välillä määritellään seuraavasti

$$D_8 = \max(|x - s|, |y - t|) \quad (\text{dp.4})$$

Tässä tapauksessa pikselit, joiden etäisyys pikselistä  $p(x, y) \leq r$ , sijaitsevat neliössä, jonka keskipiste on  $(x, y)$ .

### Esimerkki

Tarkastellaan pikseleitä, joiden  $D_8 \leq 2$  pikselistä  $p(x, y)$ . Pikselien etäisyydet ovat

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Pikselit, joiden  $D_8 = 1$ , muodostavat pikselin  $p$  8-naapurit.

Pikselien  $p$  ja  $q$  välinen  $D_4$ -etäisyys on sama kuin näiden pikselien välinen lyhin 4-polku. Sama koskee  $D_8$ -etäisyyttä. Etäisyys on riippumaton kytkeytymisestä. Kuitenkin m-kytkeytyvyydessä kahden pikselin välinen etäisyys riippuu riippuu polulla olevien pikselien arvoista.

### Esimerkki

Pikselien  $p$ ,  $p_2$  ja  $p_4$  arvo on 1 ja pikselien  $p_1$  ja  $p_3$  vastaavasti 0. Pikselien sijainti on seuraava

$$\begin{array}{cc} & p_3 & p_4 \\ p_1 & & \\ p & & \end{array}$$

Jos sallitaan kytkeytyvyys vain niiden pikselien välillä, joiden arvo on 1, silloin  $m$ -etäisyys pikselien  $p$  ja  $p_4$  välillä on 2. Jos joko  $p_1$ :n tai  $p_3$ :n arvo on 1, silloin vastaava  $m$ -etäisyys on 4.

## ARITMEETTISET JA LOOGISET OPERAATIOIT

Aritmeettisiä ja loogisia operaatioita käytetään yleisesti digitaalisessa kuvankäsittelyssä. Pikselien  $p$  ja  $q$  väliset aritmeettiset operaatiot ovat seuraavat

|               |                                     |
|---------------|-------------------------------------|
| yhteenlasku   | $p + q$                             |
| vähennyslasku | $p - q$                             |
| kertolasku    | $p * q$ , myös $pq$ ja $p \times q$ |
| jakolasku     | $p \div q$                          |

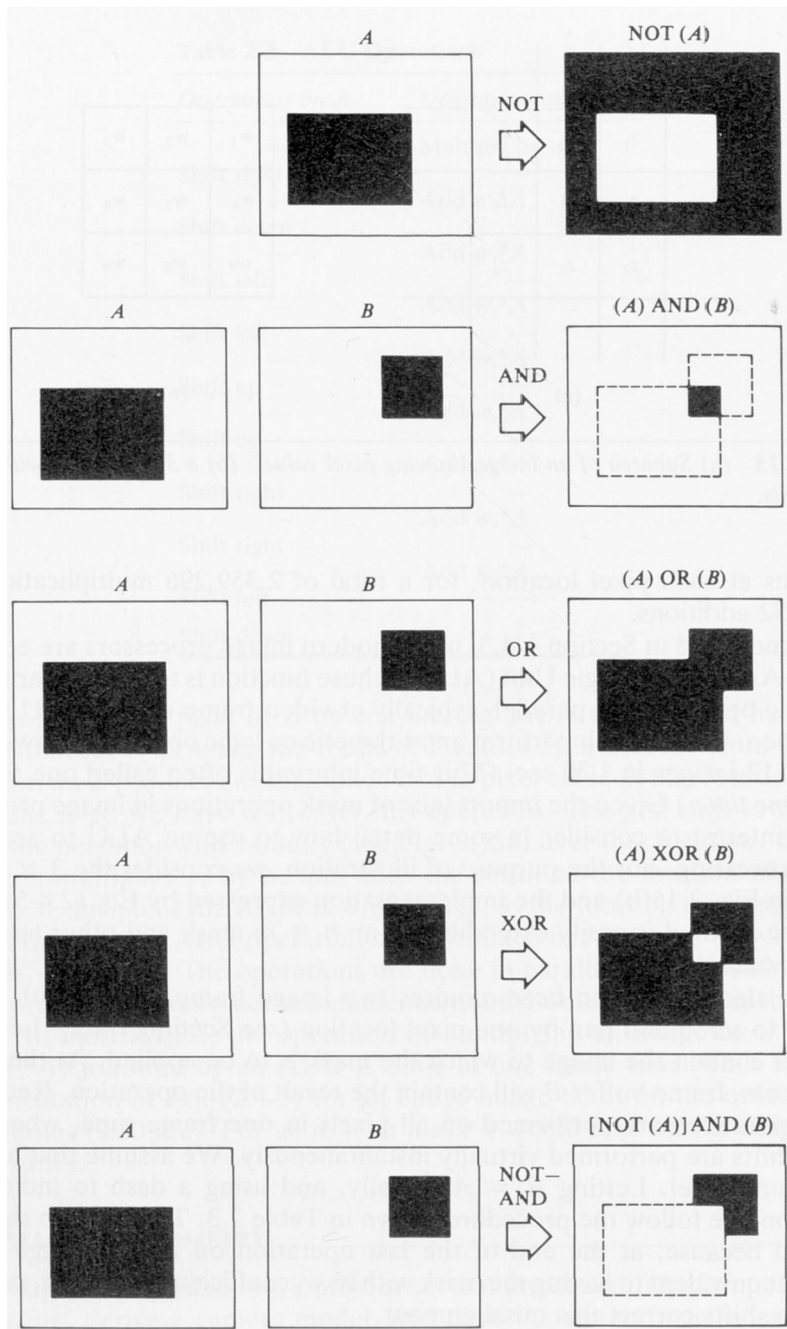
Aritmeettiset operaatiot koko kuvalla suoritetaan pikseli pikseliltä. Koko kuvien yhteenlaskulla voidaan keskiarvottaa kuvaa ja poistaa siitä satunnaisia ilmiöitä kuten kohinaa. Vähennyslaskua käyttämällä voidaan tarkastella dynaamisia ilmiöitä poistamalla kuvasta staattisena pysyvät alueet. Menetelmä on yleisessä käytössä lääketieteellisissä sovellutuksissa, jossa kuvasta halutaan poistaa staattisena pysyvä tausta. Eräs kertolaskun ja jakolaskun käyttöaluen on epälineaarisen harmaataso-asteikon korjaaminen. Tämä voi johtua joko kuvan epätasaisesta valaisusta tai sensorin epälineaarisuudesta. Aritmeettiset operaatiot kohdistetaan yhdeeen pikseliin kerrallaan.

Kuvankäsittelyssä käytetään kaikkia kolmea perus loogista operaatiota, jotka ovat

|          |                      |                         |
|----------|----------------------|-------------------------|
| AND (JA) | $p \text{ AND } q$ , | myös $p \cdot q$        |
| OR (TAI) | $p \text{ OR } q$ .  | myös $\overline{p + q}$ |
| NOT (EI) | NOT $p$ ,            | myös $\overline{p}$     |

NOT-operaatiosta käytetään myös nimityksiä invertointi tai komplementti. Nämä operaatiot ovat funktionaalisesti täydellisiä siten, että näiden yhdistelminä voidaan toteuttaa kaikki muut loogiset operaatiot. Loogisia operaatioita voidaan käyttää vain binäärikuviin kun aritmeettisiä operaatioita voidaan käyttää monitasoisiin kuviin.

Loogisia operaatioita käytetään digitaalisessa kuvankäsittelyssä sellaisiin tarkoituksiin kuin peittämiseen (masking), ominaisuuksien ilmaisuun ja muotojen analysointiin. Koko kuvan



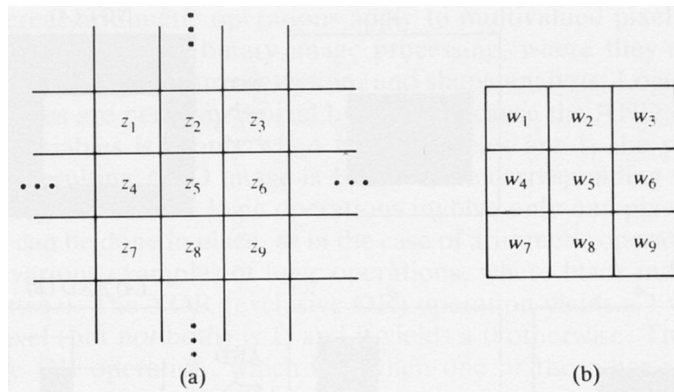
Kuva dp.14 Esimerkkejä  
binäärikuvien loogisista  
operaatioista

loogiset operaatiot suoritetaan yhdelle pikselille kerrallaan. Ehkä tärkein johdettu looginen operaatio on XOR, jossa tulos on 1 silloin kun tulojen arvot poikkeavat toisistaan ja muulloin nolla.

Paitsi koko kuvan pikseli pikseliltä operaatioita, digitaalisessa kuvankäsittelyssä käytetään naapuri-orientoituneita aritmeettisia ja loogisia operaatioita. Nämä operaatiot on järjestetty usein ns. **maski**-operaatioiksi, joista käytetään myös nimityksiä ikkuna ja suodatin. Idea maski-operaation takana on, että pikselin harmaataso on sen itsensä ja naapureiden funktio.

### Esimerkki

Tarkastellaan kuvassa dp.15 olevaa kuvan osa-aluetta, jossa pikselin  $z_5$  halutaan korvata  $3 \times 3$  alueen keskiarvolla. Korvattava pikseli  $z_5$  on tämän alueen keskellä.



Kuva dp.15 Kuvan ala-alue (a) ja  $3 \times 3$  maski pikselin  $z_5$  laskemiseksi (b)

Pikselin korvaamiseksi suoritetaan aritmeettinen keskiarvotus

$$z_5 = \frac{1}{9}(z_1 + z_2 + \dots + z_9) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i.$$

Tämä operaatio voidaan yleistää koskemaan kaikkia maskioperaatioita, joissa lasketaan pikselille sen ja sen naapureiden keskiarvo.

$$z = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_n z_n = \sum_{i=1}^n w_i z_i \quad (\text{dp.5})$$

Nyt, jos asetetaan  $w_i = 1/9$  ja  $n = 9$ , saadaan esimerkin tapaus.

Yhtälö dp.5 on laajasti käytössä digitaalisessa kuvankäsittelyssä. Sopiva maskin valinta mahdollistaa laajan joukon erilaisia käyttökelpoisia operaatioita, kuten kohinan vaimennus, alueen ohennus ja reunojen ilmaisu. Kun maski-operaatio kohdistetaan kuvan jokaiseen pikseliin, vaaditaan tietokoneelta hyvää suorituskykyä.

### Esimerkki

Kuvan koko on  $1024 \times 1024$  ja maskin koko  $4 \times 4$ . Jokaisen pikselin laskentaan tarvitaan 16 kertolaskua ja 15 yhteenlaskua. Kokonaisuudessaan tarvitaan 16.718.600 kertolaskua ja 15.744.000 yhteenlaskua.

Useimmat nykyiset kuvaprosessorit ovat varustetut ALUlla, joka kykenee suorittamaan aritmeettisen ja loogisen operaation rinnakkain. Tyypillinen käsittelynopeus on 30 kuvaa sekunnissa. Tämä nopeus tulee amerikkalaisesta televisiosta, jossa kuvataajuus on 30. Yhtä kuvaa sanotaan kehykseksi tai kehysajaksi.

Seuraavassa kuvattava algoritmi tarvitsee kaksi kuvakehysbufferia, joita pystytään vierittämään ja panoroimaan pikseli pikseliltä. Oletetaan, että kuvabufferi A sisältää kuvan, jota käsitellään. Prosessin päätteeksi kuvabufferi B sisältää prosessoidun kuvan. Muistutetaan, että kaikkia pikseleitä koskevat operaatiot suoritetaan kahden kuvan välisenä aikana ja bufferisiftaukset välittömästi. Kaikki siirrot ovat yhden pikselin mittaisia.

Ensiksi alustetaan  $B = A$ . Käytetty algoritmi on kuvattu taulukossa dp.3, jossa merkkiä — käytetään merkitsemään tyhjää operaatiota. Kaksi viimeistä siirtoa tarvitaan palauttamaan

*Taulukko dp.3 Maskioperaation algoritmi*

| Operaatiot A:ssa  | Operaatiot B:ssä        |
|-------------------|-------------------------|
| —                 | kerrotaan $w_5$ :llä    |
| siirto oikealle   | —                       |
| —                 | lisätään $w_4 \times A$ |
| siirto alas       | —                       |
| —                 | lisätään $w_1 \times A$ |
| siirto vasemmalle | —                       |
| —                 | lisätään $w_2 \times A$ |
| siirto vasemmalle | —                       |
| —                 | lisätään $w_3 \times A$ |
| siirto ylös       | —                       |
| —                 | lisätään $w_6 \times A$ |
| siirto ylös       | —                       |
| —                 | lisätään $w_9 \times A$ |
| siirto oikealle   | —                       |
| —                 | lisätään $w_8 \times A$ |
| siirto oikealle   | —                       |
| —                 | lisätään $w_7 \times A$ |
| siirto vasemmalle | —                       |
| siirto alas       | —                       |

operaatio seuraavan pikselin laskennan aloituskohtaa. Idea algoritmin takana on, että  $B$  kuva korvautuu vähitellen prosessoidulla ja  $A$  kuvaa käytetään alkuperäisenä kuvalähteenä. Maski muodostuu siten, että  $A$  kuvaa vieritetään ja panoroidaan yhden  $B$  kuvan pikselin laskennan aikana maskin verran. Maskin kertoimet on tallennettu erilliseen muistiin.

**KUVAN GEOMETRIA**

Seuraavaksi tarkastellaan useita tärkeitä kuvankäsittelyssä käytettyjä muunnoksia, johdetaan kameramalli ja käsitellään stereonäön ongelmia.

**JOITAKIN PERUSMUUNNOKSIA**

Tässä jaksossa kehitetään eräitä kuvaan liittyviä perusmenetelmiä, joita ovat kuvan kierto, skaalaus ja siirto. Kaikkia näitä muunnoksia käsitellään kolmedimensioisessa Karteesisessa koordinaatistossa. Käsiteltäessä kaksiulotteista kuvaa, käytetään pieniä kirjaimia ( $x$ ,  $y$ ) tarkoitettaessa pikseleitä. Kolmiulotteisessa koordinaatistossa käytetään isoja kirjaimia.

**Siirto**

Tarkastellaan tilannetta, jossa piste, jonka koordinaatit ovat  $(X, Y, Z)$ , halutaan siirtää uuteen paikkaan määrällä  $(X_0, Y_0, Z_0)$ . Siirto voidaan suorittaa yksinkertaisesti yhtälöillä

$$\begin{aligned} X^* &= X + X_0 \\ Y^* &= Y + Y_0 \\ Z^* &= Z + Z_0 \end{aligned} \tag{dp.21}$$



jossa  $(X^*, Y^*, Z^*)$  ovat uudet pisteen koordinaatit. Yhtälöt voidaan kirjoittaa matriisin muotoon

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.22})$$

Usein eri muunnoksia yhdistetään lopullisessa tuloksessa. Esimerkkinä voi olla muunnos, jota seuraa skaalaus ja kierto. Neliömatriisin käyttö yksinkertaistaa tällöin merkintöjä.

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.23})$$

Yhtälöissä (dp.22) ja (dp.23) tulokset  $X^*$ ,  $Y^*$  ja  $Z^*$  ovat samat. Jatkossa matriiseista käytetään lyhyempää muotoa

$$v^* = Av \quad (\text{dp.24})$$

jossa  $A$  on  $4 \times 4$  muunnosmatriisi,  $v$  on akuperäiset koordinaatit sisältävä pystyvektori

$$v = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.25})$$

ja  $v^*$  on muunnetut koordinaatit sisältävä pystyvektori

$$v^* = \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.26})$$

Käyttämällä näitä merkintöjä, muunnosmatriisi  $T$  on

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.27})$$

Muunnosprosessi on nyt yhtälön (dp.24) mukaisesti  $v^* = Tv$ .

## Skaalaus

Skaalattaessa kuva tekijöillä  $S_x$ ,  $S_y$  ja  $S_z$ , muunnosmatriisi on

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.28})$$

## Kierto

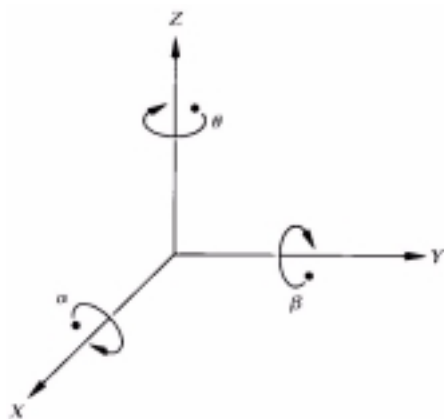
Kolmiulotteinen kierto on monimutkaisempi operaatio kuin tähän asti käsitellyt muunnokset. Yksinkertaisin on kierto koordinaattiakselin ympäri. Kierto satunnaisen avaruuden pisteen ympäri vaatii kolme muunnosta. Ensimmäisessä muunnoksessa siirretään satunnainen kiertopiste origoon. Toisessa muunnoksessa suoritetaan kierto ja kolmannessa palautetaan kuvan alkuperäinen paikka.

Kuvan dp.16 tapauksessa saadaan kierto  $Z$ -akselin ympäri kulman  $\theta$  verran saavutetaan muunnosmatriisilla

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.29})$$

Kiertokulma  $\theta$  on kellon kiertosuuntaan katsottaessa origoon positiivisen  $Z$ -akselin suunasta. Kierto vaikuttaa vain  $X$  ja  $Y$  koordinaatteihin. Kierto  $X$ -akselin ympäri saadaan aikaan muunnosmatriisilla

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.30})$$



Kuva dp.16 Pisteen kierto jokaisen koordinaattiakselin suhteen. Kulmat on mitattu kellon kiertosuuntaan katsottaessa origoon positiivisen koordinaattiakselin suunnasta.

Viimeisenä muunnosmatriisi  $Y$ -akselin ympäri kulman  $\beta$

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.31})$$

### Muunnosten yhdistäminen ja käänteiset muunnokset

Muunnokset voidaan yhdistää yhdeksi  $4 \times 4$  muunnosmatriisiksi. Esimerkiksi pisteen  $v$  siirto, skaalaus ja kierto  $Z$ -akselin ympäri voidaan toteuttaa matriisioperaatioilla

$$\begin{aligned} v^* &= R_\theta(S(Tv)) \\ &= Av \end{aligned} \quad (\text{dp.32})$$

jossa  $A = R_\theta ST$  on  $4 \times 4$  matriisi. Matriisit eivät yleisesti kommutoi, joten operaatioitten järjestys on tärkeä.

Tähän asti on tarkasteltu yhden yksittäisen pisteen muunnoksia. Tulokset on helposti laajennettavissa koskemaan  $m$ :n pisteen joukon samanaikaisia muunnoksia. Tarkastellaan  $m$ :ää pistettä, joiden koordinaatit ovat  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . Näiden pisteiden samanaikainen muunnos toteutetaan  $4 \times 4$  muunnosmatriisilla  $A$  seuraavasti.

$$V^* = AV \quad (\text{dp.33})$$

jossa  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]$  ja tulosmatriisin  $V^*$  dimensiot ovat  $4 \times m$ . Tulosmatriisin sarake  $v_i^*$  sisältää lähtöpisteen  $v_i$  muunnetut koordinaatit.

Monilla edelläkuvatuista muunnoksista on käänteinen muunnos. Käänteiset muunnosmatriisit voidaan kehittää lähtien alkuperäisen muunnoksen kaavasta. Esimerkiksi siirron käänteinen muunnosmatriisi on

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_0 \\ 0 & 1 & 0 & -Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.34})$$

ja vastaavasti käänteinen kierto  $Z$ -akselin suhteen

$$R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & 0 & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & 1 & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.35})$$

## PERSPEKTIIVIMUUNNOKSET

Perspektiivimuunnos (sanotaan myös kuvausmuunnokseksi) kuvaa 3 ulotteisen pisteen tasolle. Perspektiivimuunnos näyttelee keskeistä roolia kuvaprosessissa, sillä ne kuvaavat tavan, jolla todellinen kolmiulotteinen maailma saadaan tasokuvaan.

Kuvassa dp.17 on malli kuvan muodostusprosessista. Kameran koordinaattijärjestelmässä ( $x, y, z$ ) muodostuva kuva on  $xy$ -tasossa ja optinen akseli yhtyy  $z$ -akseliin. Kuvan keskipiste on tällöin kuvatason origossa ja linssin keskipiste on koordinaateissa  $(0, 0, \lambda)$ . Jos kamera on tarkennettuna kaukaiseen kohteeseen,  $\lambda$  on linssin polttoväli. Tässä oletetaan, että kameran koordinaattisysteemi yhtyy maailman koordinaattijärjestelmään ( $X, Y, Z$ ). Tämä rajoitus poistetaan myöhemmin.

Olkoon  $(X, Y, Z)$  satunnaisen pisteen koordinaatit 3-ulotteisessa maailmassa. Seuraavassa tarkastelussa oletetaan, että  $Z > \lambda$ . Toisin sanoen tarkasteltava kohde on kameran linssin edessä. Ensimmäinen tehtävä on määrätä pisteen  $(X, Y, Z)$  projektio  $xy$ -tasossa. Tämä voidaan tehdä samanmuotoisten kolmioiden avulla. Käyttäen kuvassa dp.17 olevia merkintöjä

$$\begin{aligned}\frac{x}{\lambda} &= -\frac{X}{Z - \lambda} \\ &= \frac{X}{\lambda - Z}\end{aligned}\tag{dp.36}$$

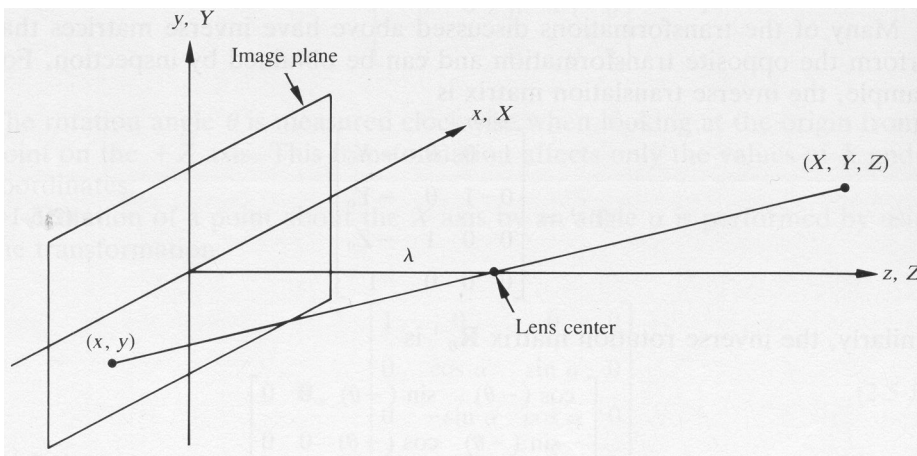
ja

$$\begin{aligned}\frac{y}{\lambda} &= -\frac{Y}{Z - \lambda} \\ &= \frac{Y}{\lambda - Z}\end{aligned}\tag{dp.37}$$

jossa negatiivinen etumerkki tarkoittaa, että kuvapisteen ovat kuvapinnalla kohteeseen nähden siirtyneet origoon nähden peilikuviksi. Kohteen kuvatason projektion koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälöt (dp.36) ja (dp.37).

$$x = \frac{\lambda X}{Z - \lambda}\tag{dp.38}$$

ja



Kuva dp.17 Kuvausprosessin perusmalli. Kameran koordinaattijärjestelmä ( $x, y, z$ ) on sovitettu ympäröivän maailman koordinaattijärjestelmään ( $X, Y, Z$ ).

$$y = \frac{\lambda X}{Z - \lambda} \quad (\text{dp.39})$$

Yhtälöt ovat epälineaarisia koska niihin liittyy jako muuttujalla  $Z$ . Yhtälöitä voidaan käyttää sellaisenaan, mutta kuten edellä niin nytkin matriisi muoto on käytön kannalta edullista. Tämä käy päinsä homogeenisten matriisien avulla.

Karteesisen koordinaatiston piste  $(X, Y, Z)$  voidaan esittää homogeenisessa koordinaatistossa pisteenä  $(kX, kY, kZ, k)$ , jossa  $k$  on satunnainen nollasta poikkeava vakio. Paluu karteesiseen koordinaatistoon tapahtuu jakamalla kolme ensimmäistä termiä viimeisellä. Karteesisen koordinaatiston piste voidaan kirjoittaa vektorimuotoon

$$w = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{dp.40})$$

ja sen homogeeninen vastinen on

$$w_h = \begin{bmatrix} kX \\ kY \\ kZ \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{dp.41})$$

Jos perspektiivimuunnosmatriisi määritellään

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.42})$$

Merkitään tuloa  $Pw_h$   $c_h$ :lla, jolloin

$$c_h = Pw_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kX \\ kY \\ kZ \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kX \\ kY \\ kZ \\ -\frac{kZ}{\lambda} + k \end{bmatrix} \quad (\text{dp.43})$$

Vektorin  $c_h$  elementit ovat kamerakoordinaatit homogeenisessa muodossa. Koordinaatit voidaan palauttaa karteesiseen koordinaatistoon jakamalla kolme ensimmäistä elementtiä neljännellä. Siten minkä tahansa pisteen karteesiset koordinaatit kamerakoordinaattijärjestelmässä on vektori, jonka muoto on

$$c = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \\ \frac{\lambda Y}{\lambda - Z} \\ \frac{\lambda Z}{\lambda - Z} \end{bmatrix} \quad (\text{dp.44})$$

Kaksi ensimmäistä komponenttia muodostavat kuvapinnan, jolle on projisoitu 3-ulotteinen piste  $(X, Y, Z)$ . Kolmannella komponentilla ei ole kiinnostavuutta kuvan dp.17 mallin kannalta. Tämä komponentti toimii vapaana muuttujana käänteisessä perspektiivimuunnoksessa.

Käänteinen perspektiivimuunnos kuvaa kuvan takaisin 3-ulotteiseen avaruuteen, joten

$$w_h = P^{-1}c_h \quad (\text{dp.45})$$

jossa

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.46})$$

Oletetaan, että kuvapisteen koordinaatit ovat  $(x_0, y_0, 0)$ , jossa  $z = 0$  indikoi pisteen olevan kuvatasossa. Piste voidaan esittää homogeenisena vektorina

$$c_h = \begin{bmatrix} kx_0 \\ ky_0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{dp.47})$$

Tästä saadaan laskettua homogeeniset maailman koordinaatit käyttämällä yhtälöä (dp.45)

$$w_h = \begin{bmatrix} kx_0 \\ ky_0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{dp.48})$$

tai karteesisessa koordinaatistossa

$$c_h = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.49})$$

Tulos on ilmeisesti odottamaton, sillä mikä tahansa kuvatason piste kuvautuu 3-ulotteisessa avaruudessa tasoon. Ongelma johtuu siitä, että 3-D näkymä kuvautuu tasoksi. Muunnos on monta yhteen tyyppiä ja siinä on menetetty etäisyysinformaatio. Käänteisessä muunnoksessa kuvatason piste kuvautuu pistejoukoksi, jotka muodostavat suoran. Tämän suoran yhtälöt ovat

$$X = \frac{x_0}{\lambda}(\lambda - Z) \quad (\text{dp.50})$$

ja

$$Y = \frac{y_0}{\lambda}(\lambda - Z) \quad (\text{dp.51})$$

Yhtälöt osoittavat, että ellei ole jotakin tietoa 3-D pisteen sijainnista, näkymän rekonstruointi kaksiulotteisesta kuvasta ei täysin onnistu. Tätä huomiota voidaan käyttää hyväksi muotoiltaessa käänteinen perspektiivimuunnos käyttämällä z:aa vapaana muuttujana nollan asemesta.

$$c_h = \begin{bmatrix} kx_0 \\ ky_0 \\ kz \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{dp.52})$$

Yhtälöistä (dp.45) seuraa, että

$$w_h = \begin{bmatrix} kx_0 \\ ky_0 \\ kz \\ \frac{kz}{\lambda} + k \end{bmatrix} \quad (\text{dp.53})$$

josta muunnos karteesiseen koordinaatistoon johtaa

$$w = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda x_0}{\lambda + z} \\ \frac{\lambda y_0}{\lambda + z} \\ \frac{\lambda z}{\lambda + z} \end{bmatrix} \quad (\text{dp.54})$$

Toisin sanoen käsittelemällä z:aa vapaana muuttujan kuvasta johdetut maailman koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} X &= \frac{\lambda x_0}{\lambda + z} \\ Y &= \frac{\lambda y_0}{\lambda + z} \\ Z &= \frac{\lambda z}{\lambda + z} \end{aligned} \quad (\text{dp.55})$$

Ratkaisemalla  $z$  viimeisestä yhtälöstä ja sijoittamalla kahteen ensimmäiseen, saadaan

$$X = \frac{x_0}{\lambda}(\lambda - Z) \quad (\text{dp.56})$$

ja

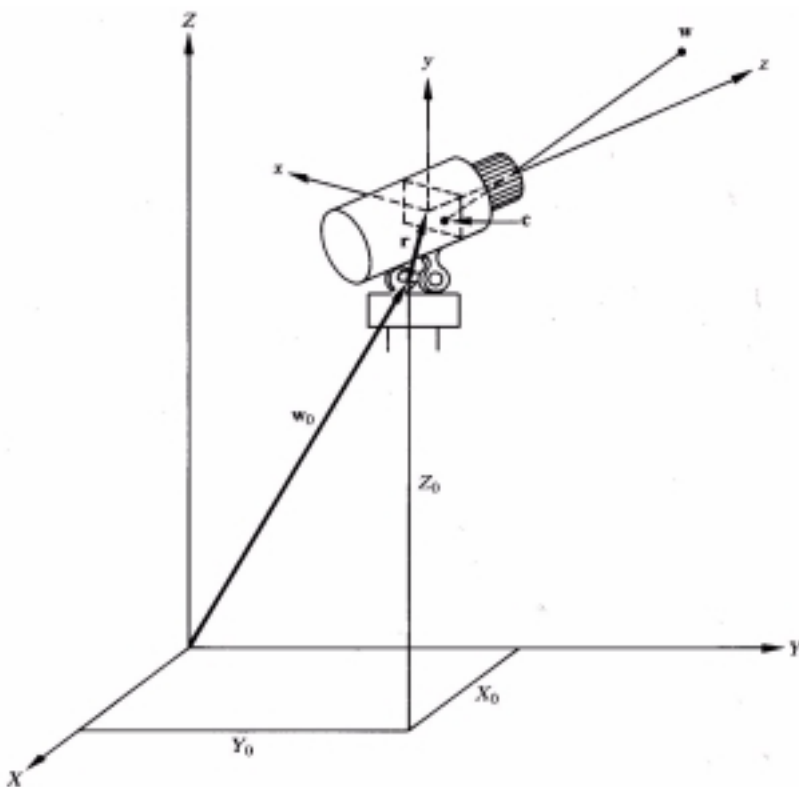
$$Y = \frac{y_0}{\lambda}(\lambda - Z) \quad (\text{dp.57})$$

jotka ovat yhtäpitävät sen kanssa, että palautettaessa 3-D näkymä kaksiulotteisesta kuvasta käänteisellä perspektiivimuunnoksella, tarvitaan tieto ainakin yhdestä maailman koordinaatiston pisteestä.

### Kameramalli

Yhtälöt (dp.43) ja (dp.44) kuvaavat 3-ulotteisen näkymän kuvautumista 2-ulotteiselle tasolle. Malli perustui oletukselle, että kameran ja maailman koordinaatistot yhtyivät. Tässä jaksossa kehitetään malli, jossa koordinaatistot voidaan erottaa toisistaan. Edelleen perus kuvan muodostamismalli on sama.

Kuvassa dp.18 on maailman koordinaattijärjestelmä  $(X, Y, Z)$ , johon on sijoitettu sekä kamera että 3-D pisteet  $w$ . Kuvaan on merkitty myös kamerakoordinaatisto  $(x, y, z)$  ja kuvapisteen  $c$ . Kamera on asennettu jalustalle, joka sallii kiertämisen kulman  $\theta$  ja kallistamisen kulman  $\alpha$ . Tässä kierto on kulma  $x$  ja  $X$  koordinaattien välillä ja kallistus vastaavasti kulma  $z$  ja  $Z$  koordinaattien välillä. Jalustan keskustan ero maailman koordinaattien origoon on  $w_0$  ja kuvatason keskipisteen ero jalustan keskipisteen välillä on  $r$ , jonka komponentit ovat  $(r_1, r_2, r_3)$ .



Kuva dp.18 Kuvauksen geometria käytettäessä kahta koordinaattijärjestelmää.



Edellisissä kappaleissa kehitetty konsepti tarjoaa kaikki tarvittavat työkalut johtaa kameramalli kuvan dp.18 geometriassa. Menetelmänä on yhdistää kameras ja maailman koordinaatistot käyttämällä aikaisemmin kuvattuja muunnoksia. Tämän jälkeen käytetään koordinaattimuunnoksia eli ongelma palautetaan kuvan dp.17 geometriaan.

Oletetaan aluksi normaali tilanne, jossa jalustan keskus ja kuvataso ovat maailmankoordinaatiston origossa. Kuvan dp.18 tilanteeseen päästään mm. seuraavalla sekvenssillä operaatioita.

- \*\* Jalustan keskipiste siirretään pois origosta
- \*\* Kierretään  $x$ -akselia
- \*\* kallistetaan  $z$ -akselia
- \*\* siirretään kuvataso pois jalustan keskipisteestä

Muunnoksissa maailman koordinaatisto ei muutu ja kameras näkemä pistejoikko on toinen kuin alkutilassa. Suorittamalla maailman koordinaatistolle sama sekvenssi, palautuu alkutilanne ja kuvan dp.17 geometria. Näin kahden koordinaatiston ongelma on supistunut, jossa maailman koordinaatiston pisteille suoritetaan edellä listattu operaatiosarja.

Maailman koordinaatiston origo voidaan siirtää jalustan keskipisteeseen muunnoksella

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.58})$$

Toisin sanoen homogeeninen maailman piste  $w_h$ , jonka koordinaatit ovat  $(X_0, Y_0, Z_0)$  on uuden koordinaattijärjestelmän origossa muunnoksen  $Gw_h$  jälkeen.

Kiertokulma on akselien  $x$  ja  $X$  välinen. Kierto saadaan aikaan muunnoksella  $Z$ -akselin (tai tässä vaiheessa myös  $z$ -akselin suhteen) suhteen kulmalla  $\theta$ . Kiertoon käytetään yhtälöä dp.28, jolloin on huomioitava kierron positiivinen suunta. Muunnoksella saadaan jokainen piste, myös  $Gw_h$ , kierrettyä  $x$ -akselin suhteen tai  $x$ -akseli kierrettyä haluttuun asentoon.

Seuraava vaihe muunnoksissa on  $z$ -akselin kallistus. Kallistus määriteltiin  $Z$  ja  $z$  akselien väliseksi kulmaksi. Kallistus saadaan aikaan kiertämällä kamerakoordinaatistoa  $X$  akselin suhteen  $\alpha$  kulmalla. Kierto voidaan toteuttaa muunnosmatriisilla (dp.29) käyttäen. Jälleen on huomattava kierron positiivinen suunta.

Muunnosmatriisit voidaan yhdistää yhdeksi matriisiksi  $R = R_\alpha R_\theta$ .

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta\cos\alpha & \cos\theta\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\theta\sin\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.59})$$

Lopuksi kuvatazon siirto vektorin  $r$  verran saadaan aikaan muunnosmatriisilla

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.60})$$

Nyt kohdistamalla pisteeseen  $w_h$  muunnossarja  $CRGw_h$ , saadaan kameran ja maailman koordinaatit yhtymään. Pisteeseen  $w_h$  kuvatason koordinaatit määrätään yhtälön (dp.43) avulla. Homogeeninen maailman koordinaatiston piste kuvan dp.18 geometriassa on seuraava homogeeninen kamerakoordinaatiston piste

$$c_h = PCR G w_h \quad (\text{dp.61})$$

Yhtälö (dp.61) sovittaa yhteen kaksi erillistä koordinaatistoa.

Kappaleessa perspektiivimuunnokset määrättiin kuvapisteen karteesiset koordinaatit  $(x, y)$  jakamalla ensimmäinen ja toinen  $c_h$ :n komponentti neljännellä. Tehdään laajennus menetelmän koskemaan myös yhtälön (dp.61) tapausta, jolloin

$$x = \lambda \frac{(X - X_0) \cos \theta + (Y - Y_0) \sin \theta - r_1}{-(X - X_0) \sin \theta \sin \alpha + (Y - Y_0) \cos \theta \sin \alpha - (Z - Z_0) \cos \alpha + r_3 + \lambda} \quad (\text{dp.62})$$

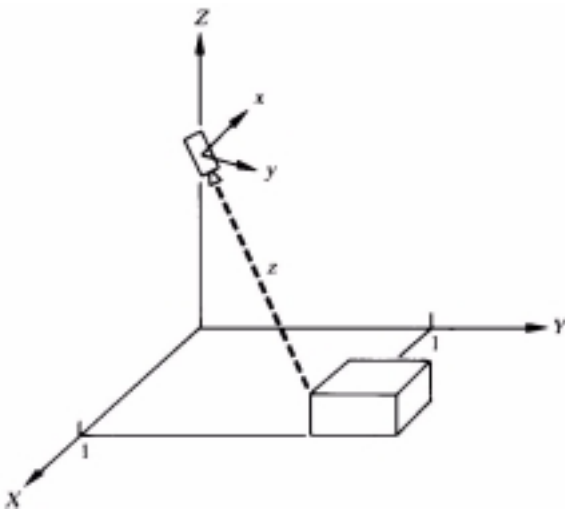
ja

$$y = \lambda \frac{-(X - X_0) \sin \theta \cos \alpha + (Y - Y_0) \cos \theta \sin \alpha + (Z - Z_0) \sin \alpha - r_2}{-(X - X_0) \sin \theta \sin \alpha + (Y - Y_0) \cos \theta \sin \alpha - (Z - Z_0) \cos \alpha + r_3 + \lambda} \quad (\text{dp.63})$$

jotka ovat pisteen  $w$ , jonka koordinaatit ovat  $(X, Y, Z)$ , kuvakoordinaatit. Nämä yhtälö supistuvat yhtälöiksi (dp.38) ja (dp.39) kun  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  ja  $\alpha = \theta = 0$ .

### Esimerkki

Edellä kehitetyn konseptin valottamiseksi tarkastellaan tapausta, jossa kamera on kohotettu origosta, kierto on  $135^\circ$  ja kallistus samoin  $135^\circ$ . Tilanne on kuvattu kuvassa dp.19.



Kuva dp.19 Kameran sijoittelu esimerkin tapauksessa.

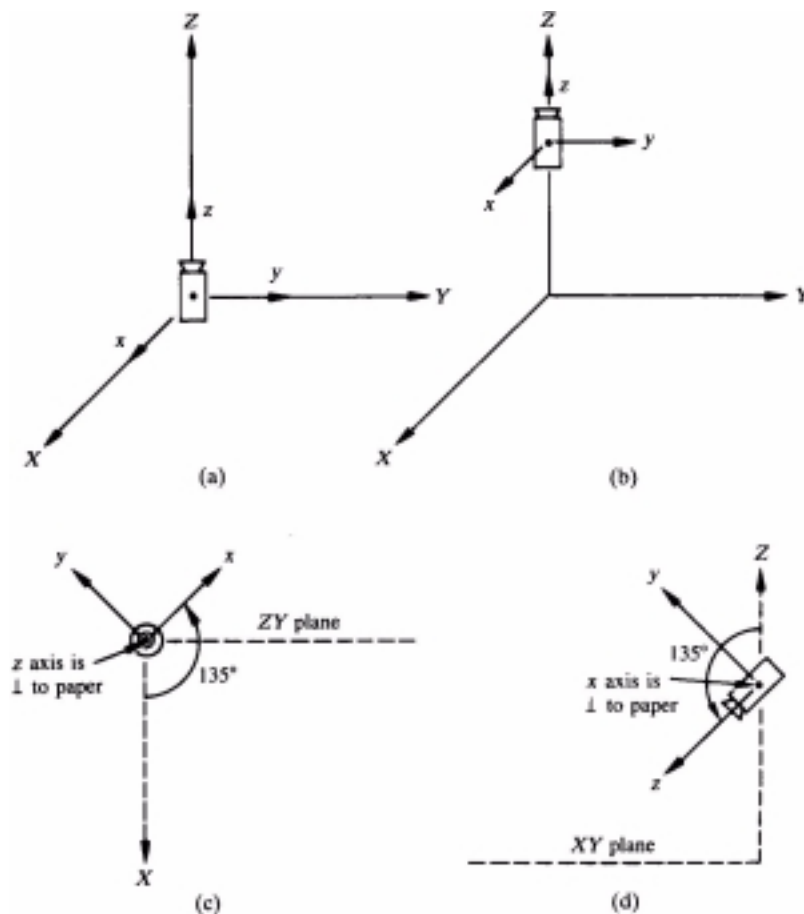
Kierron positiivinen suunta on kellon kiertosuunta vastaan kunkin akselin suhteen katsottaessa kohti origoa.

Tarkastellaan seuraavaksi yksityiskohtaisesti tarvittavia muunnoksia, jotta kamera päätyisi kuvan dp.19 asentoon. Askeleet on esitetty kuvassa dp.20. Kohdassa (a) kamera on normaaliasennossa maailman koordinaatiston origossa. Kuvassa (b) kamera on siirretty Z-akselin suunnassa lopulliseen asemaansa. Tämän jälkeen maailman koordinaatteja käytetään vain kiertojen referensseinä sillä tosiasiallisesti kierrot tapahtuvat kamerakoordinaateissa. Kuvassa (c) nähdään kierto x-akselin suhteen. Kamera on kiertynyt kellon kiertosuuntaa vastaan ja maailman koordinaatiston pisteet vastaavasti kellon kiertosuunnan mukaisesti, mikä tekee  $\theta$ :sta positiivisen. Kuvassa (d) suoritetaan viimeinen muunnos, kameran kallistus. Maailman koordinaatistot on esitetty kahdessa viimeisessä kuvassa katkoviivalla indikoimaan niiden referenssiluonnetta.

Esimerkissä käytetään seuraavia parametreja

$$\begin{array}{lll} X_0 = 0 & Y_0 = 0 & Z_0 = 1 \text{ m} \\ \alpha = 135^\circ & \theta = 135^\circ & \\ r_1 = 0.03 \text{ m} & r_2 = r_3 = 0.02 \text{ m} & \lambda = 35 \text{ mm} = 0,035 \text{ m} \end{array}$$

Tässä tapauksessa nurkka on koordinaateissa  $(X, Y, Z) = (1, 1, 0,2)$ .



Kuva dp.20 Kameran kierto vaiheittain esimerkin tapauksessa

Kuvan koordinaatit voidaan laskea sijoittamalla parametrit yhtälöihin (dp.62) ja (dp.63)

$$x = \lambda \frac{-0,03}{-1,53 + \lambda}$$

ja vastaavasti

$$y = \lambda \frac{+0,42}{-1,53 + \lambda}$$

Sijoittamalla  $\lambda = 0,035$  yhtälöihin, saadaan

$$x = 0,0007 \text{ m} \quad \text{ja} \quad y = -0,009 \text{ m}$$

Nähdään, että nämä koordinaatit ovat  $2,5 \times 2,5 \text{ cm:m}$  sisällä kuvatasolla, Voidaan helposti johtaa, että esimerkiksi linsillä, jonka polttoväli on 200 mm, voidaan kuvata koko nurkka. Yhtälöillä (dp.62) ja (dp.63) laskettiin koordinaatit, joiden keskipiste on kuvan keskellä. Mikäli origo halutaan kuvan vasempaan ylänurkkaan, tarvitaan lisämuunnos.

### Kameran kalibrointi

Edellisessä kappaleessa kehitettiin yhtälöt, joilla voidaan maailman koordinaatiston piste  $w$  kuvata kuvakoordinaatiston pisteeksi  $(x, y)$ . Yhtälöiden (dp.62) ja (dp.63) käyttö edellyttää tietoa linssin polttovälistä, kuvan siirtymästä (offset) ja kameran kierto- ja kallistuskulmasta. Näiden parametrien mittaaminen on mahdollista. Mukavammin tämä käy kuitenkin käyttämällä tähän tarkoitukseen itse kameraa varsinkin, jos se liikkuu lyhyin väliajoin. Tähän tarkoitukseen tarvitaan muutama piste, joiden koordinaatit tunnetaan. Kamerakoordinaatiston laskentaa näiden tunnettujen pisteiden avulla, sanotaan kameran kalibroinniksi.

Oletetaan, että  $A = PCRG$  (yhtälö (dp.61)), jossa  $A$ :ssa ovat kaikki kameran parametrit ja  $c_h = Aw_h$ . Oletettamalla, että  $k = 1$  homogeenisessa koordinaatistossa, saadaan

$$\begin{bmatrix} c_{h1} \\ c_{h2} \\ c_{h3} \\ c_{h4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{dp.64})$$

Kameran karteesiset koordinaatit ovat

$$x = c_{h1}/c_{h4} \quad (\text{dp.65})$$

ja

$$y = c_{h2}/c_{h4} \quad (\text{dp.66})$$

Sijoittamalla  $c_{h1} = xc_{h4}$  ja  $c_{h2} = yc_{h4}$  ja kertomalla matriisi auki, saadaan

$$\begin{aligned} xc_{h4} &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14} \\ yc_{h4} &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24} \\ c_{h4} &= a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44} \end{aligned} \quad (\text{dp.67})$$

jossa termi  $c_{h3}$  on jätetty pois, koska se koskee z-akselia.

Sijoittamalla kahteen ensimmäiseen yhtälöön  $c_{h4}$ , saadaan kaksi yhtälöä, joissa on 12 tuntematonta kerrointa.

$$a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z - a_{41}xX - a_{42}xY - a_{43}xZ - a_{44}x + a_{14} = 0 \quad (\text{dp.68})$$

$$a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z - a_{41}yX - a_{42}yY - a_{43}yZ - a_{44}y + a_{24} = 0 \quad (\text{dp.69})$$

Kalibrointiproseduuri on tämän jälkeen

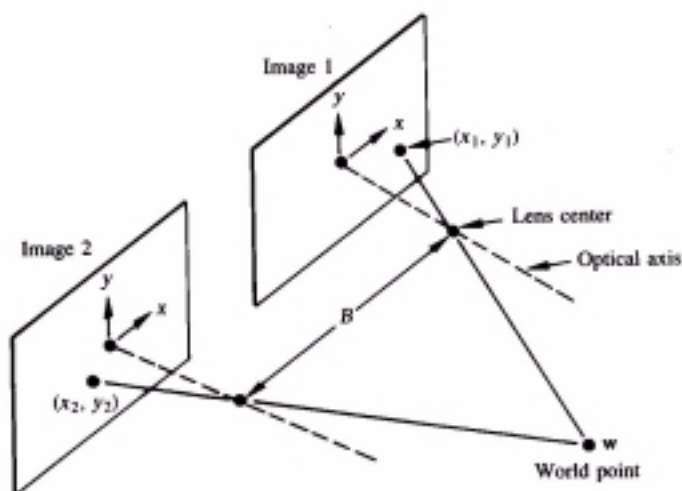
- \*\* valitaan  $m \leq 6$  maailman koordinaatiston pistettä (kaksi yhtälöä), joiden koordinaatit ovat  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , jossa  $i = 1, 2, \dots, m$ .
- \*\* kuvataan nämä pisteet kameralla, joka sijaitsee halutussa asemassa, vastaavien kuvapisteen  $(x_i, y_i)$ , jossa  $i = 1, 2, \dots, m$ , määrittämiseksi.
- \*\* sijoitetaan saadut tulokset yhtälöihin (dp.68) ja (dp.69) ja ratkaistaan tuntemattomat kertoimet.

Tämän jälkeen voidaan soveltaa tavanomaisia menetelmiä yhtälöryhmän ratkaisemiseksi.

## Stereokuvaus

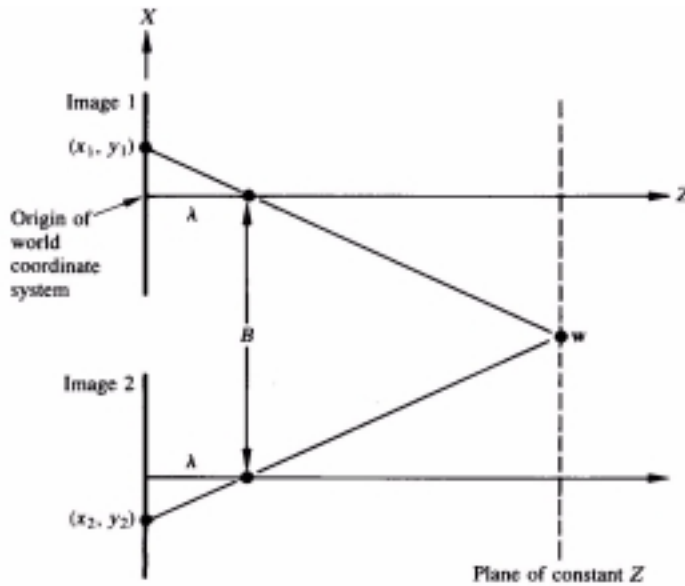
Kolmiulotteisen näkymän kuvaaminen tasoon on monta yhteen tyyppinen muunnos, josta näkymän palauttaminen yksikäsitteisesti ei onnistu. Kuvan syvyysinformaatio voidaan kuitenkin säilyttää käyttämällä stereoskooppista<sup>1</sup> kuvaustekniikkaa.

Stereokuvauksessa käytetään kahta erillistä kuvakoordinaatistoa yhdestä maailmakoordinaatiston pisteestä  $w$ . Järjestely on esitetty kuvassa dp.21. Kahden linssin keskipisteiden välistä etäisyyttä sanotaan **peruslinjaksi**. Tavoitteena on saada maailmankoordinaatiston pisteestä  $w$ , jonka koordinaatit ovat  $(X, Y, Z)$ , kaksi kuvapistettä  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  kahdella samanlaisella kameralla, joiden koordinaatistot ovat yhtenevät lukuunottamatta linssien välistä etäisyyttä. Kameroiden koordinaatistot ja maailmakoordinaatisto on säädetty niin, että kummallekin kameralle pisteen  $w$   $Z$ -koordinaattiakseli on täsmälleen sama.



Kuva dp.21 Stereokuvausprosessin malli.

<sup>1</sup> Lyhyiden vuoksi käytetään yleisesti nimitystä stereo.



Kuva dp.22 Ylhäältäkuvattu tilanne, jossa ensimmäinen kamera on siirretty maailman koordinaatiston origoon.

Tarkastellaan ensiksi tilannetta, jossa maailman koordinaatisto ja kameran 1 koordinaatistot yhtyvät (kuva dp.22). Tällöin piste  $w$  sijaitsee  $X$ -akselin suhteen suoralla

$$X_1 = \frac{x_1}{\lambda}(\lambda - Z_1) \quad (\text{dp.70})$$

jossa  $X$  ja  $Z$  indikoivat, että ensimmäinen kamera on siirretty maailman koordinaatiston origoon. Toinen kamera ja piste  $w$  säilyttävät suhteellisen asemansa ensimmäiseen kameraan nähden. Jos vastaavasti toinen kamera siirretään maailman koordinaatiston origoon, saadaan seuraava suoran yhtälö, jolla piste  $w$  sijaitsee.

$$X_2 = \frac{x_2}{\lambda}(\lambda - Z_2) \quad (\text{dp.71})$$

Koska kameroilla on ero  $B$  ja koordinaattiakseli  $Z$  on sama, seuraa tästä, että

$$X_2 = X_1 + B \quad (\text{dp.72})$$

ja

$$Z_2 = Z_1 = Z \quad (\text{dp.73})$$

jossa  $B$  on peruslinjan etäisyys. Sijoittamalla yhtälöt (dp.72) ja (dp.73) yhtälöihin (dp.70) ja (dp.71), saadaan

$$X_1 = \frac{x_1}{\lambda}(\lambda - Z) \quad (\text{dp.74})$$

ja

$$X_1 + B = \frac{x_2}{\lambda}(\lambda - Z) \quad (\text{dp.75})$$

Vähentämällä yhtälöstä (dp.75) yhtälö (dp.74) ja ratkaisemalla  $Z$ :n suhteen, saadaan

$$Z = \lambda - \frac{\lambda B}{x_2 - x_1} \quad (\text{dp.76})$$

joka osoittaa, että tunnettaessa kuvissa koordinaattipisteet  $x_1$  ja  $x_2$ , peruslinja  $B$  ja linssien polttoväli, voidaan pisteen  $w$   $Z$ -koordinaatti laskea helposti.  $X$  ja  $Y$  koordinaatit saadaan suoraan yhtälöistä (dp.50) ja (dp.51) käyttäen joko  $(x_1, y_1)$  tai  $(x_2, y_2)$ .

Vaikein tehtävä määrittäessä kahdesta saman näkymän kuvasta  $Z$ -koordinaattia on löytää kuvista vastaavat pisteet. Usein käytetty menetelmä on valita yhdestä kuvasta pieneltä alueelta piste ja sen jälkeen yrittää löytää paras vastaava alue toisesta kuvasta korrelaatiotekniikalla. Kun kuvassa on selvä yksityiskohta kuten nurkka tai vastaava, ominaisuuksien vertailu tuottaa yleensä nopeammin tuloksen.

Kameroiden kalibrointiin voidaan käyttää aikaisemmin kuvattua menetelmää soveltamalla sitä erikseen kumpaankin kameraan.





# K U V A M U U N N O K S E T

Raimo Jokinen

- ◆ Johdanto Fourier muunnokseen
- ◆ Diskreetti Fourier muunnos
- ◆ Joitakin 2-ulotteisen Fourier muunnoksen ominaisuuksia
- ◆ Nopea Fourier muunnos
- ◆ Muita separoituvia kuvamuunnoksia
- ◆ Hotelling muunnos

Tässä luvussa tarkastellaan kaksiulotteisten funktioitten muunnoksia ja niiden ominaisuuksia. Kuvamuunnokset ovat näytelleet erittäin tärkeää roolia kuvan käsittelyssä ja niitä on tutkittu niin tereettisesti kuin käytännön tasollakin intensiivisesti viime vuosina. Niitä on käytetty kuvan parantamiseen, korjaamiseen, koodaukseen ja kuvaukseen. Jotkut paljon käytetyt kuvan pakkausmenetelmät perustuvat kuvamuunnoksiin.

Tässä luvussa tarkastellaan pääasiassa Fourier-muunnosta sen laajan käytön vuoksi. Muita tarkasteltavia muunnoksia ovat Walsh, Hadamar, diskreetti kosinimuunnos, Haar, Slant ja Hotelling.

## JOHDANTO FOURIER-MUUNNOKSEEN

Olkoon  $f(x)$  jatkuva reaalimuuttujan  $x$  jaksoton funktio. Tällöin funktion  $f(x)$  Fourier-muunnos  $F\{f(x)\}$  määritellään yhtälöllä

$$F\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (\text{km.1})$$

Fourier-muunnokselle on määritelty myös **käänteinen Fourier-muunnos**

$$F^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \quad (\text{km.2})$$

Yhtälöt (km.1) ja (km.2) muodostavat **Fourier-muunnos parin**. Fourier-muunnos on olemassa, jos  $f(x)$  on jatkuva ja integroituva ja vastaavasti käänteinen Fourier-muunnos on olemassa, jos  $F(u)$  on integroituva. Käytännössä ehdot täyttyvät lähes aina..

Kuvankäsittelyssä keskitytään reaalisiin funktioihin  $f(x)$ . Reaalisen funktion Fourier-muunnos on kuitenkin kompleksinen, joten

$$F(u) = R(u) + jI(u) \quad (\text{km.3})$$

jossa  $R(u)$  ja  $I(u)$  ovat funktion  $F(u)$  reaali- ja imaginaariosa. Yhtälö (km.3) on usein mukavampaa esittää napakoordinaattimuodossa.

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)} \quad (\text{km.4})$$

jossa

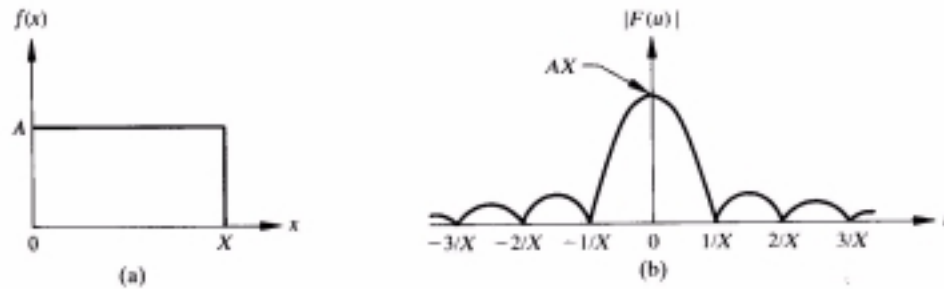
$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)} \quad (\text{km.5})$$

ja

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u)}{R(u)} \right] \quad (\text{km.6})$$

Fourier-muunnosta sanotaan usein **Fourier-spektri**ksi tai lyhyesti **spektri**ksi, jossa  $|F(u)|$  on amplitudi- ja  $\phi(u)$  on vaihespektri. Spektrin neliö  $P(u)$

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \quad (\text{km.7})$$



Kuva km.1 Suorakaide ikkunan (a) Fourier-muunnos (b)

tunnetaan yleisesti funktion  $f(x)$  **tehospektri**nä. Myös spektrin tiheys ja tehotiheys ovat käytettyjä termejä.

Muuttujaa  $u$  sanotaan usein taajuusmuuttujaksi. Nimitys on ilmeinen, kun eksponenttimuoto ilmaistaan sinin ja kosinin summana käyttäen Eulerin kaavaa

$$e^{-j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - j \sin(2\pi ux) \quad (\text{km.8})$$

### Esimerkki

Tarkastellaan kuvassa km.1 olevaa yksinkertaista funktiota. Sen Fourier-muunnos on yhtälön (km.1) mukaan

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx = \int_0^X A e^{-j2\pi ux} dx \\ &= \frac{-A}{j2\pi u} \left[ e^{-j2\pi ux} \right]_0^X = \frac{-A}{j2\pi u} \left[ e^{-j2\pi uX} - 1 \right] \\ &= \frac{A}{j2\pi u} \left[ e^{j\pi uX} - e^{-j\pi uX} \right] e^{-j\pi uX} \\ &= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi uX) e^{-j\pi uX} \end{aligned}$$

joka on kompleksinen funktio. Amplitudispektri on

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left| \frac{A}{\pi u} \right| |\sin(\pi uX)| |e^{-j\pi uX}| \\ &= AX \left| \frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX} \right| \end{aligned}$$

Amplitudispektri on kuvassa km.1.

Fourier-muunnos voidaan laajentaa koskemaan kaksiulotteista funktiota  $f(x,y)$ . Jos  $f(x,y)$  on jatkuva ja integroitava ja  $F(u)$  on integroitava, niin kaksiulotteinen muunnospari on

$$F\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{km.9})$$

ja

$$F^{-1}\{F(u)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (\text{km.10})$$

jossa  $u$  ja  $v$  ovat taajuusmuuttujia.

Kuten yksiulotteisessa tapauksessa, amplitudi-, vaihe- ja tehospektrit ovat

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)} \quad (\text{km.11})$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right] \quad (\text{km.12})$$

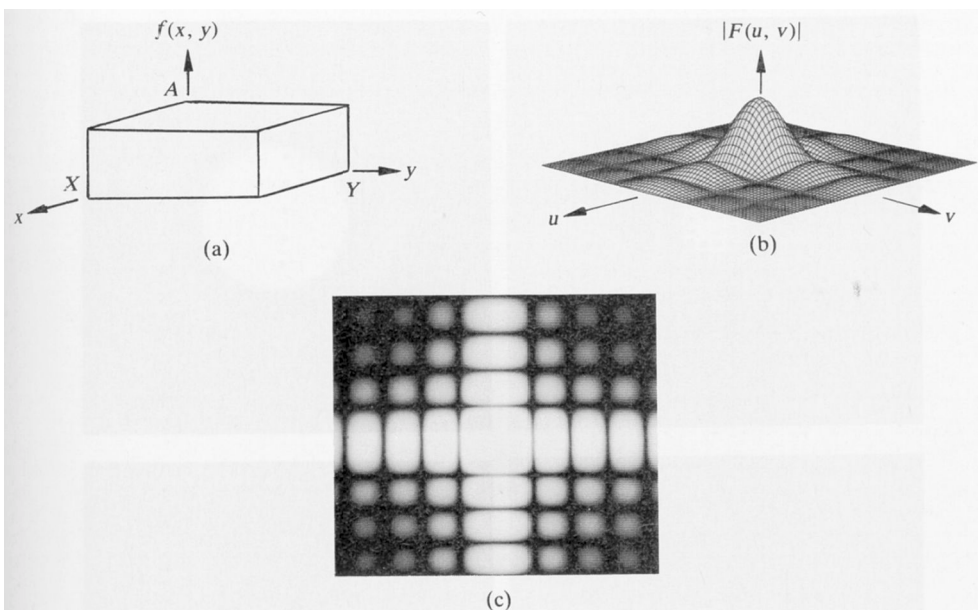
ja

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (\text{km.13})$$

### Esimerkki

Tarkastellaan kuvassa km.2 olevaa kaksiulotteista suorakaidefunktiota. Sen Fourier-muunnos on

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= A \int_0^X e^{-j2\pi ux} dx \int_0^Y e^{-j2\pi vy} dy = A \left[ \frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u} \right]_0^X \left[ \frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v} \right]_0^Y \\ &= \frac{A}{-j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] \frac{1}{-j2\pi v} [e^{-j2\pi vY} - 1] \\ &= AXY \left[ \frac{\sin(\pi uX) e^{-j\pi uX}}{\pi uX} \right] \left[ \frac{\sin(\pi vY) e^{-j\pi vY}}{\pi vY} \right] \end{aligned}$$



Kuva km.2  
Suorakaide-  
funktion  $f(x, y)$   
(a) Fourier-  
spektri  $F(u, v)$   
(b) ja sama  
esitettyä  
intensiteetti-  
funktiona (c)

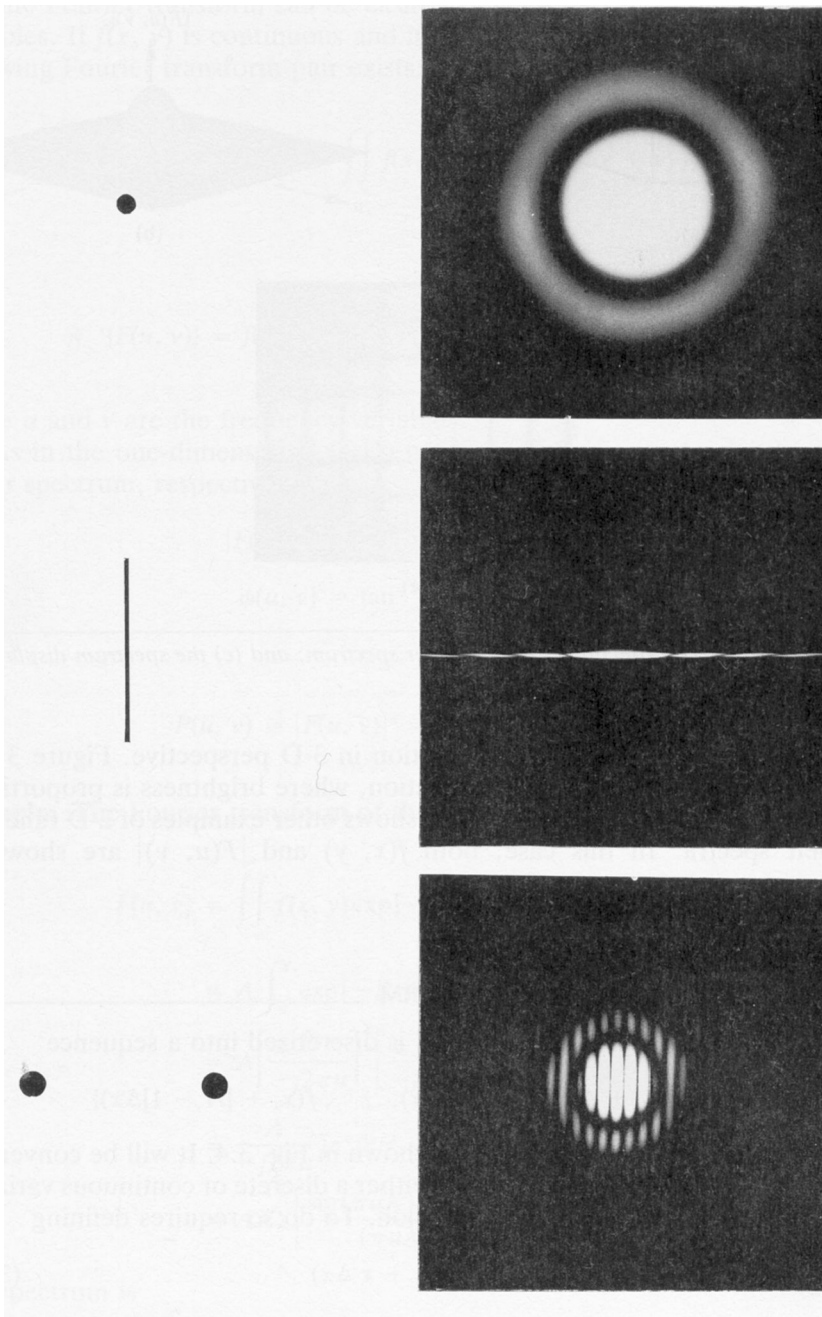
Funktion  $f(x, y)$ :n amplitudispektri on

$$|F(u, v)| = AXY \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right| \left| \frac{\sin(\pi v Y)}{\pi v Y} \right|$$

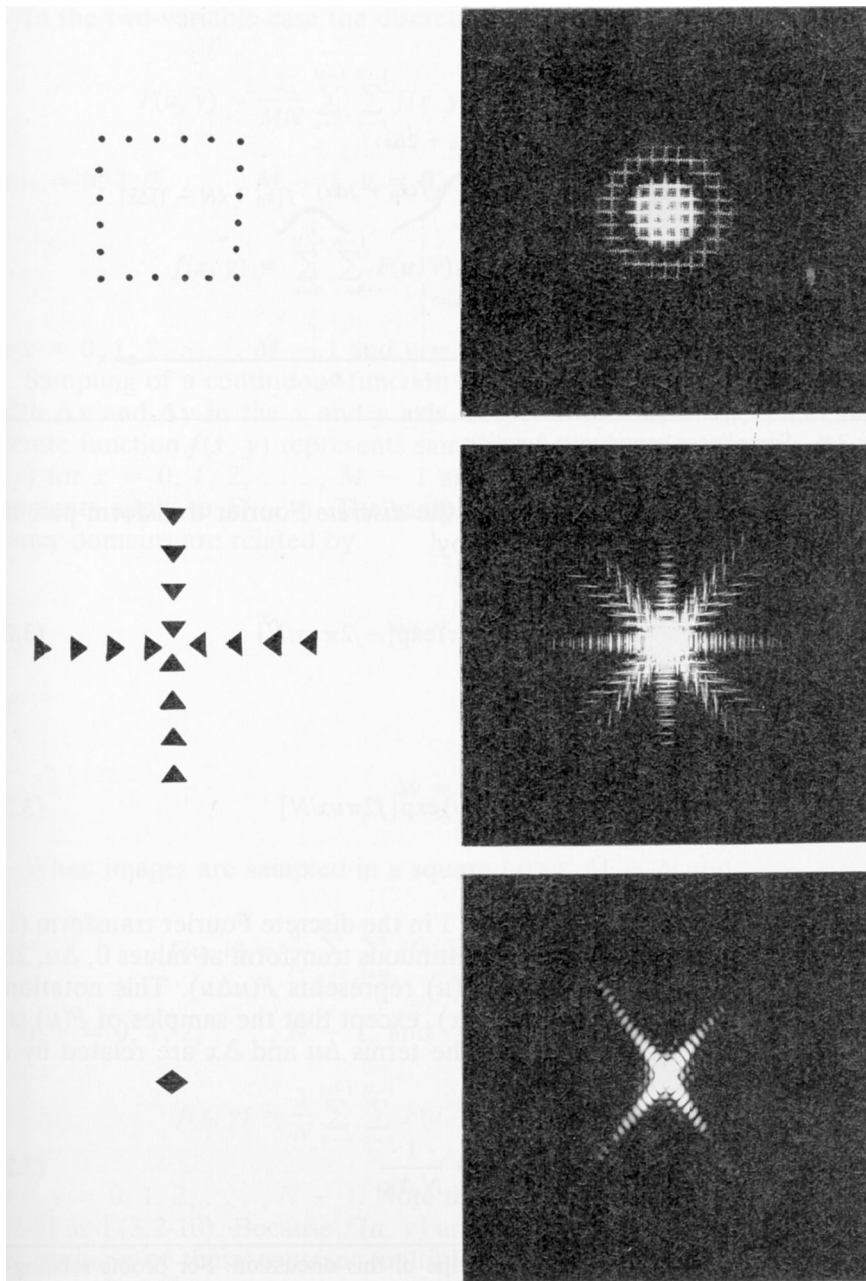
Muita 2-ulotteisia Fourier-muunnoksen amplitudispektrejä on kuvassa km.3. Taajuustasossa kuvat ovat esitetyt intensiteettifunktioina.

### DISKREETTI FOURIER-MUUNNOS

Jatkuva funktio  $f(x)$  näytteistetään ottamalla  $N$  näytettä, joiden väli on  $\Delta x$  (kuva km.4). Seuraavassa mukavuuden vuoksi muuttuja  $x$  tarkoittaa asiayhteydestä riippuen joko jatkuvaa tai diskreettiä muuttujaa. Tällöin voidaan kirjoittaa diskreetti funktio  $f(x)$  seuraavasti



Kuva km.3 Joitakin esimerkkejä 2-ulotteisesta Fourier-muunnoksesta.



Kuva km.3 Jatkoa

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x) \quad (\text{km.14})$$

jossa  $x$  tarkoittaa diskreettejä arvoja  $0, 1, 2, \dots, N-1$ , jolloin funktio  $f(x)$  on näytteistetty tasavälein  $\Delta x$ .

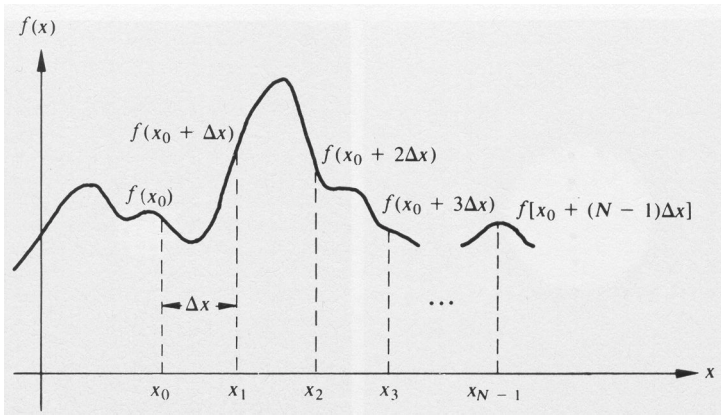
Näytteistetyn funktion diskreetti Fourier-muunnospari määritellään seuraavasti

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N} \quad (\text{km.15})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ja

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux/N} \quad (\text{km.16})$$





Kuva km.4 Näytteenotto jatkuvasta funktiosta tasavälein  $\Delta x$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Diskreetin Fourier-muunnoksen taajuusmuuttujan  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$  arvot vastaavat jatkuvan muunnoksen arvoja  $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, (N-1)\Delta u$ . Toisin sanoen  $F(u)$  edustaa tässä arvoja  $F(u\Delta u)$ . Termit  $\Delta u$  ja  $\Delta x$  sitoo toisiinsa yhtälö

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} \quad (\text{km.17})$$

Kahden muuttujan tapauksessa diskreetti Fourier-muunnos pari on

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (\text{km.18})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ja

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (\text{km.19})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Jatkuvan funktion näytteenotto on nyt kaksiulotteinen ristikko, jossa näytteenottovälit ovat  $\Delta x$  ja  $\Delta y$   $x$  ja  $y$  akselien suhteen. Diskreetti funktio  $f(x, y)$  edustaa tässä tapauksessa pisteitä  $f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$ , kun  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Sama koskee funktiota  $F(u, v)$ . Näytteenottovälin  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  sitoo taajuuseroon  $\Delta u$  ja  $\Delta v$  yhtälöt

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad (\text{km.20})$$

ja

$$\Delta v = \frac{1}{N\Delta y} \quad (\text{km.21})$$

Kun kuva on näytteistetty neliömäisesti järjestettynä niin, että  $M = N$ . Silloin muunnospari on muotoa

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)/N} \quad (\text{km.22})$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , ja

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)/N} \quad (\text{km.23})$$

jossa  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Näissä yhtälöissä  $N^2$  jako on jaettu kumpaankin muunnokseen. Koska kyseessä on muunospari, näin voidaan menetellä. Käytännössä neliömäisesti digitoitu kuva helpottaa jonkin verran matemaattista käsittelyä.

Sekä yksi- että kaksiulotteiset amplitudi-, vaihe- ja energiaspektrit on annettu yhtälöissä (km.5), (km.6), (km.7), (km.11), (km.12) ja (km.13). Ainoa ero on, että nyt käsitellään diskreettejä arvoja.

Jatkuvan muunnoksen tapauksesta poiketen diskreetti Fourier-muunnos on aina olemassa. Tämä voidaan näyttää yksiulotteisessa tapauksessa sijoittamalla yhtälö (km.16) yhtälöön (km.15)

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left[ \sum_{r=0}^{N-1} F(r) e^{j2\pi rx/N} \right] e^{-j2\pi ux/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} F(r) \left[ \sum_{x=0}^{N-1} e^{j2\pi rx/N} e^{-j2\pi ux/N} \right] \end{aligned} \quad (\text{km.24})$$

Yhtälön (km.24)  $e$ :n eksponenttilausekkeiden summat ovat

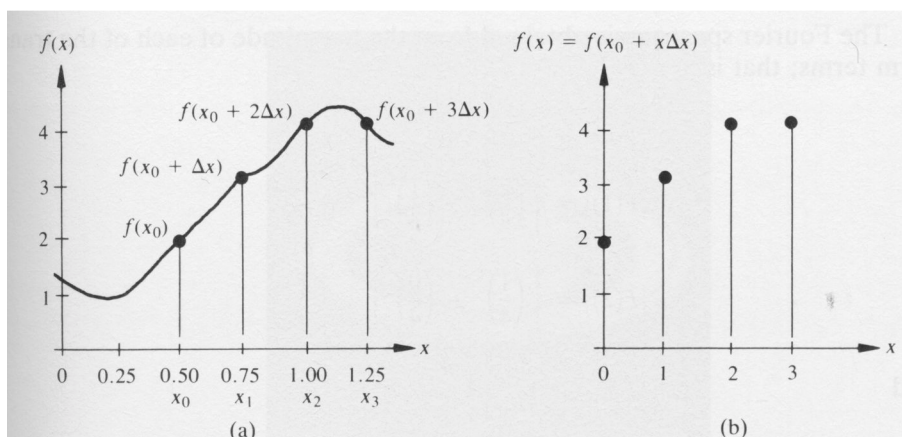
$$\sum_{r=0}^{N-1} F(r) \left[ \sum_{x=0}^{N-1} e^{j2\pi rx/N} e^{-j2\pi ux/N} \right] = \begin{cases} N & \text{kun } r = u \\ 0 & \text{kun } r \neq u \end{cases} \quad (\text{km.25})$$

Yhtälö (km.24) osoitti, että yksiulotteinen diskreetti Fourier-muunnos on aina olemassa. Sama koskee 2-ulotteista muunnosta.

### Esimerkki

Yhtälöiden (km.15) ja (km.16) valottamiseksi tarkastellaan kuvassa km.5 (a) olevaa jatkuvaa funktiota, josta otetaan näytteet  $x_0 = 0,50$ ,  $x_1 = 0,75$ ,  $x_2 = 1,00$  ja  $x_3 = 1,25$ . Näytteistetty signaali on kuvassa km.5 (b).

Sovelletaa tähän tapaukseen diskreetin Fourier-muunnoksen kaavaa (km.15)



Kuva km.5 Yksinkertainen jatkuva funktio (a) ja siitä otetut näytteet (b).



$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi 0x/4} = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\
 &= \frac{1}{4} [2 + 3 + 4 + 4] = 3,25
 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 F(1) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi x/4} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2}] \\
 &= \frac{1}{4} [2 - j3 - 4 + j4] \\
 &= \frac{1}{4} [-2 + j]
 \end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen muoto saadaan joko Eulerin kaavalla tai tarkastelemalla  $e$ :n potenssia yksikköympyrässä. Loput kaksi taajuuskomponenttia ovat vastaavasti

$$F(2) = -\frac{1}{4} [1 + j0]$$

ja

$$F(3) = -\frac{1}{4} [2 + j]$$

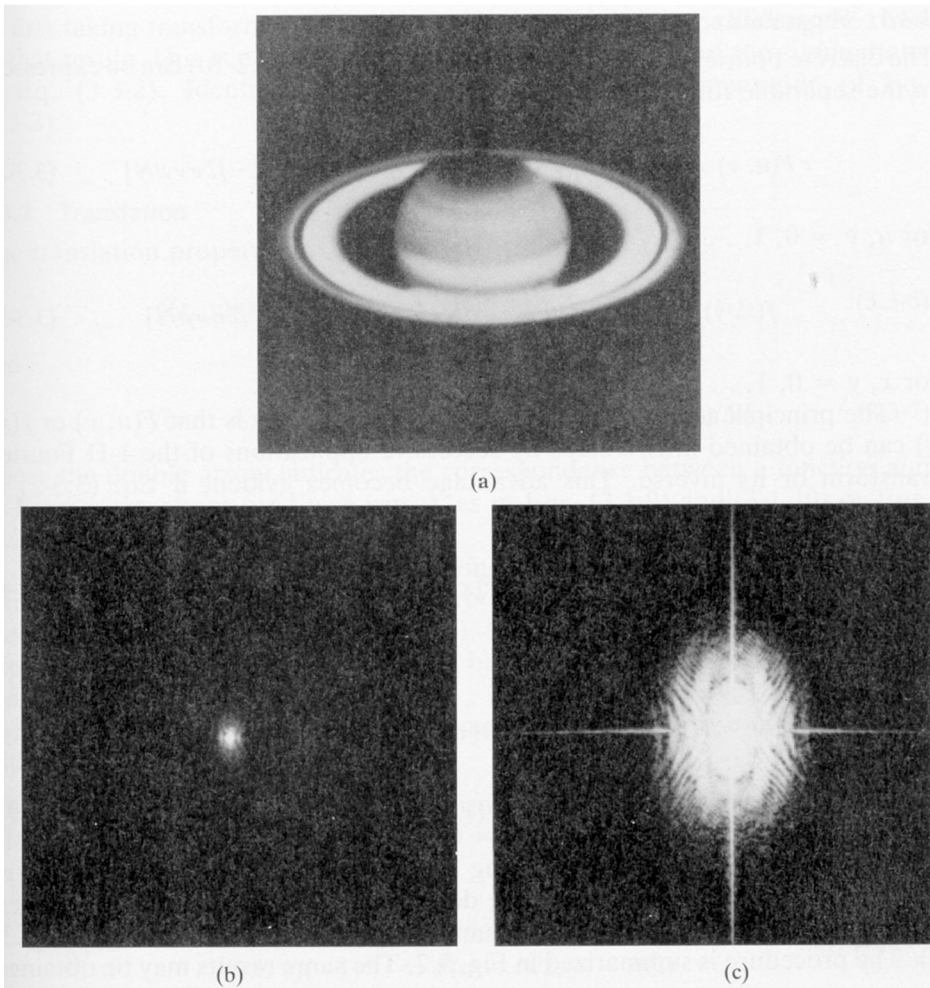
Nähdään, että neljä  $x$ -tason näytettä tuottaa neljä taajuustason näytettä  $u$ . Tulos voidaan yleistää niin, että  $N$   $x$ -tason näytettä tuottaa aina  $N$  taajuustason näytettä  $u$ . Amplitudispektri saadaan ottamalla taajuuskomponenteista itseisarvot.

$$\begin{aligned}
 |F(0)| &= 3,24 \\
 |F(1)| &= \sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4} \\
 |F(2)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{0}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \\
 |F(3)| &= \sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}
 \end{aligned}$$

## KAKSIULOTTEISEN FOURIER-MUUNNOKSEN OMINAISUUKSIA

Tässä jaksossa keskitytään Fourier-muunnoksen ominaisuuksiin. Vaikka pääasiallinen kiinnostuksemme on 2-ulotteisissa muunnoksissa, joitakin ominaisuuksia on ensin helpompi tarkastella 1-ulotteisena.

Useita ominaisuuksia valaistaan spektrikuvilla intensiteettifunktioina. Fourier-muunnoksen dynamiikka on usein suurempi kuin mitä pystytään näyttämään tai ihminen pystyy havaitsemaan. Tällöin kirkkaimmat osat dominoivat kuvaa. Sama ongelma esiintyy toisinaan myös tallennettaessa kuva filmille. Havainnollisuuden parantamiseksi intensiteettikuva kompressoidaan funktiolla



Kuva km.6 Kuva Saturnuksesta (a). Kuvassa (b) on Saturnus-kuvan Fourier-muunnos  $F(u, v)$  ja kuvassa (c) on kompressoitu intensiteettifunktio  $D(u, v)$ . Kuvat on esitetty 8 bitillä.

$$D(u, v) = c \log[1 + |F(u, v)|] \quad (\text{km.26})$$

jossa  $c$  on skaalausvakio ja logaritmifunktio suorittaa tarvittavan kompressoinnin. Menetelmä parantaa merkittävästi spektrien intensiteettikuvien visuaalista luettavuutta. Kuvassa km.6 on esimerkki logaritmifunktion käytöstä. Kuvat on alunperin esitetty 8 bitillä (256 harmaatasoa). Funktio  $\log[1 + |F(u, v)|]$  kompressoii tuloksen välille 0 ja 6,4. Tämän jälkeen kuva on skaalattu takaisin 8 bittiin. Näkyvien yksityiskohtien lisääntyminen on ilmeinen.

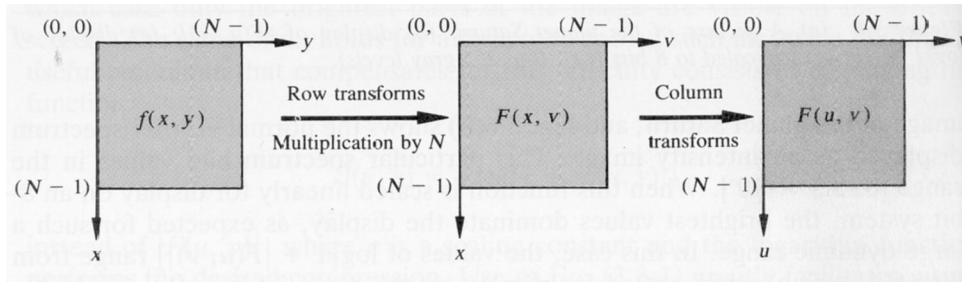
## SEPAROITUVUUS

Yhtälöiden (km.22) ja (km.23) diskreetti Fourier-muunnospari voidaan kirjoittaa separoituun muotoon

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi ux/N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi vy/N} \quad (\text{km.27})$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , ja

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} e^{j2\pi ux/N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi vy/N} \quad (\text{km.28})$$



Kuva km.7 2-ulotteisen Fourier-muunnoksen laskeminen käyttäen 1-ulotteisia muunnoksia.

jossa  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Separoituvuudella saavutettava periaatteellinen etu on, että muunnokset voidaan jakaa kahteen 1-ulotteiseen muunnokseen. Tämä nähdään kirjoittamalla yhtälö (km.27) muotoon

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/N} \quad (\text{km.29})$$

jossa

$$F(x, v) = N \left[ \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right] \quad (\text{km.30})$$

Jokaisella  $x$ :n arvolla yhtälön (km.30) suluissa oleva lauseke on 1-ulotteinen Fourier-muunnos, jonka taajuusarvot ovat  $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . 2-ulotteinen funktion  $F(x, v)$  muunnos saadaan ottamalla muunnos pitkin jokaista funktion  $f(x, y)$  riviä ja jakamalla tulos  $N$ :llä. Haluttu lopputulos,  $F(u, v)$  saadaan tämän jälkeen ottamalla muunnos pitkin funktion  $F(x, v)$  jokaista saraketta. Menetelmää on valotettu kuvassa km.7. Sama tulos saadaan, jos muunnos otetaan ensin pitkin funktion  $f(x, y)$  sarakkeita ja ottamalla tuloksesta muunnokset pitkin rivejä.

## SIIRTO

Fourier-muunnoksen siirto-ominaisuus on

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x + v_0 y)/N} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (\text{km.31})$$

ja

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N} \quad (\text{km.32})$$

jossa kaksoisnuoli merkitsee muunnosten symmetrisyyttä. Yhtälö (km.31) merkitsee sitä, että kertomalla funktio  $f(x, y)$   $e$ :n eksponenttifunktiolla siirtää muunnoksen taajuustason origon pisteeseen  $(u_0, v_0)$ . Vastaavasti kertomalla funktio  $F(u, v)$  eksponenttitermillä, siirtää spatiaalitason origon pisteeseen  $(x_0, y_0)$ .

Tässä luvussa ja myöhemmin luvussa Kuvan parantaminen yhtälöä (km.6) käytetään siirtämään taajuustason origo pisteeseen  $u_0 = v_0 = N/2$ , eli

$$e^{j2\pi(u_0 x + v_0 y)/N} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

ja

$$f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - N/2, v - N/2) \quad (\text{km.33})$$

Funktion  $f(x, y)$  Fourier-muunnoksen origo voidaan siirtää  $N \times N$  kuvan keskelle kertomalla  $f(x, y)$  termillä  $(-1)^{x+y}$ . Yhden muuttujan tapauksessa termi supistuu muotoon  $(-1)^x$ .

On huomattava, että yhtälö (km.32) siirtää origon mutta ei vaikuta muunnoksen amplitudiarvoihin, joten

$$|F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N}| = |F(u, v)| \quad (\text{km.34})$$

Tämä on hyvä pitää mielessä, koska muunnoksen visuaalinen tarkastelu rajoittuu tavallisesti amplitudien tarkasteluun.

## JAKSOLLISUUS JA KONJUGAATTI SYMMETRISYYS

Diskreetti Fourier-muunnos<sup>1</sup> ja käänteinen diskreetti Fourier-muunnos ovat jaksollisia. Niiden jakson pituus on  $N$ .

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N) \quad (\text{km.45})$$

Perus spektrillä on ääretön määrä peilikuvasektrejä. Näitä ei tarvitse erikseen laskea vaan riittää, että lasketaan perusspektri. Sama koskee myös spatiaalitason funktiota.

Jos  $f(x, y)$  on reaalinen, niin sen muunnos on konjugaatti symmetrinen.

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (\text{km.46})$$

tai mielenkiintoisempi tulos

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (\text{km.47})$$

jossa  $F^*(u, v)$  on funktion  $F(u, v)$  kompleksikonjugaatti.

Kuten aikaisemmin mainittiin, Fourier-muunnoksen amplitudispektri on usein kiinnostava. Jotta saataisiin selville yhtälöiden (km.45) ja (km.47) merkitys tässä suhteessa, tarkastellaan aluksi 1-ulotteista muunnosta

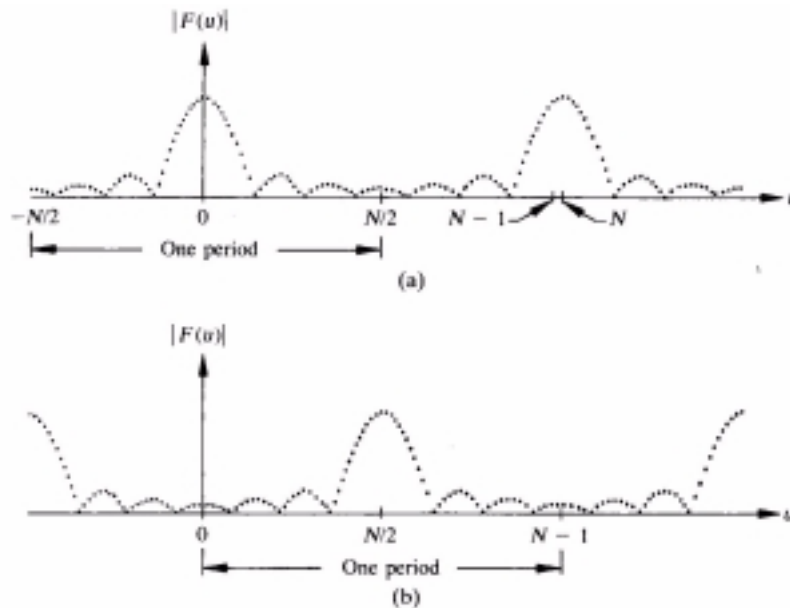
$$F(u) = F(u + N)$$

ja

$$|F(u)| = |F(-u)|.$$

Jaksollisuuden mukaan jakson pituus on  $N$  ja symmetrisyyden perusteella spektri on origossa (kuva km.8 (a)). Fourier-muunnos määritellään välille 0 ja  $N - 1$ . Tällöin kuitenkin spektriin tulee mukaan kaksi puolikasta, jotka ovat symmetriset pisteen  $N/2$  suhteen. Jotta saataisiin näytettyä yksi koko jakso, siirretään origo pisteeseen  $u = N/2$ . Siirron tulos on esitetty kuvassa km.8 (b). Siirto suoritetaan kertomalla funktio  $f(x)$  termillä  $(-1)^x$ .

<sup>1</sup> Nimitys Fourier-muunnos on tässä yhteydessä virheellinen Oikeampi termi olisi Fourier-sarja.

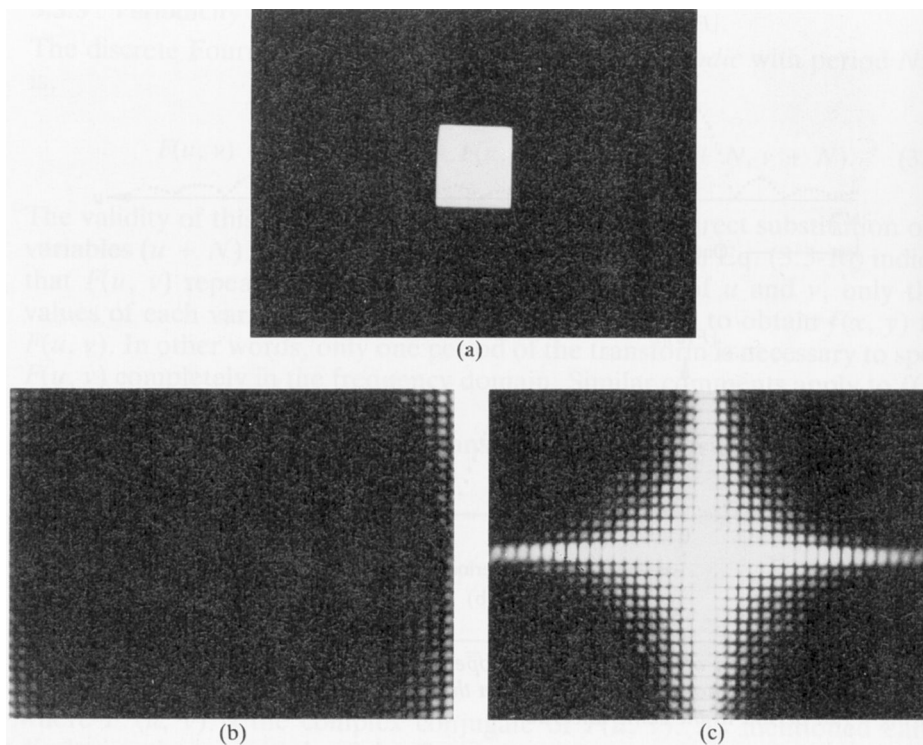


Kuva km.8 Fourier-muunnoksen jaksollisuuden havainnollistaminen.

Fourier-muunnoksen jakso on välillä  $-N/2$  ja  $N/2$ . Muunnos esitetään kuitenkin välillä  $0$  ja  $N-1$  (a). Kuvassa (b) spektri on siirretty niin, että koko jakso on välillä  $0$  ja  $N-1$ .

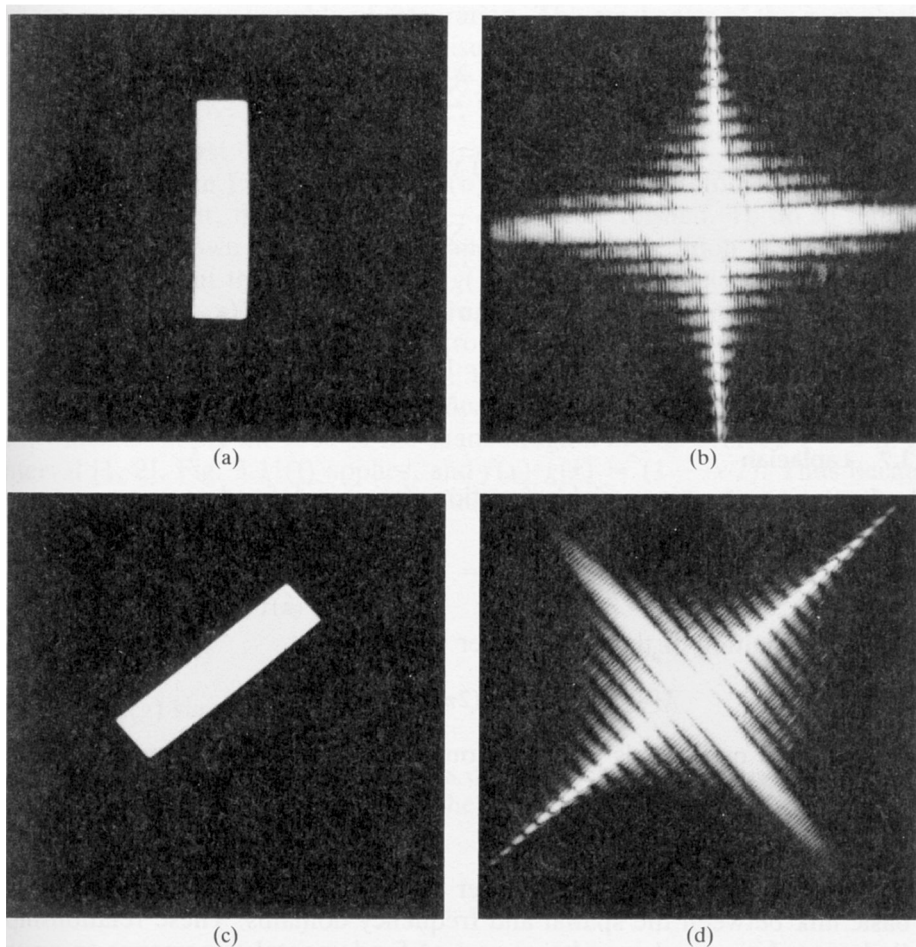
Sama tilanne vallitsee myös 2-ulotteisessa Fourier-muunnoksessa. Tässä tapauksessa visuaaliset tarkastelut ovat vielä vaikeampia kuin 1-ulotteisessa tapauksessa ellei origoa siirretä. Origon siirto tapahtuu yhtälöä (km.33) käyttäen.

Kuvassa km.9 on yksinkertainen esimerkki, jossa valotetaan Fourier-muunnoksen origon siirron vaikutusta kuvan luettavuuteen. Kuvan (a)-kohdassa on valkoinen neliö mustalla pohjalla. Kuvassa (b) on (a)-kuvan Fourier-muunnos esitettynä niin, että origo on vasemmassa ylänurkassa. Viimeisessä (c)-kuvassa origo on siirretty kuvan keskelle. Vaikutus nähdään selvästi. Kuvan keskellä oleva origo tekee kuvasta selvästi luettavamman.



Kuva km.9 Yksinkertainen kuva (a), jonka Fourier-muunnos on kuvassa (b). Kuvassa (c) Fourier-muunnoksen origo on siirretty kuvan keskelle.





Kuva km.10 Kuvan ja Fourier-muunnoksen kierron vaikutus.

## KIERTO

Esitettäessä kuva napakoordinaateissa

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \phi \quad v = \omega \sin \phi$$

silloin funktiot  $f(x, y)$  ja  $F(u, v)$  saavat muodon  $f(r, \theta)$  ja  $F(\omega, \phi)$ . Suora sijoitus joko jatkuvaan tai diskreettiin Fourier-muunnospariin johtaa

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0) \quad (\text{km.48})$$

Toisin sanoen kiertämällä spatiaalitason kuvaa kulman  $\theta_0$  kiertää Fourier-muunnosta saman kulman. Vastaavasti Fourier-muunnoksen kierto aiheuttaa spatiaalitason kuvan kierron samalla määrällä.

## OSITTELU JA SKAALAUUS

Jatkuvan ja diskreetin Fourier-muunnosparin määritelmistä voidaan johtaa

$$F\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = F\{f_1(x, y)\} + F\{f_2(x, y)\} \quad (\text{km.49})$$

ja yleisesti

$$F\{f_1(x,y) \times f_2(x,y)\} \neq F\{f_1(x,y)\} \times F\{f_2(x,y)\} \quad (\text{km.50})$$

Toisin sanoen osittelu on voimassa yhteenlaskun suhteen mutta ei kertolaskun. Kerrottaessa funktio skalaareilla  $a$  ja/tai  $b$ , saadaan yhtäläisyydet

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v) \quad (\text{km.51})$$

ja

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b) \quad (\text{km.52})$$

## KESKIAARVO

Paljon käytetty määritelmä 2-ulotteisen diskreetin funktion keskiarvolle on

$$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \quad (\text{km.53})$$

Sijoittamalla  $u = v = 0$  yhtälöön (km.22), saadaan

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \quad (\text{km.54})$$

Siten  $\bar{f}(x,y)$ :n ja funktion  $f(x,y)$  Fourier-muunnoksen välillä on suhde

$$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{N} F(0,0) \quad (\text{km.55})$$

## LAPLACE

Kaksimuuttujaisen funktion  $f(x,y)$  Laplace määritellään seuraavasti

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (\text{km.56})$$

Fourier-muunnoksen määritelmän perusteella saadaan

$$F\{\nabla^2 f(x,y)\} \Leftrightarrow -(2\pi)^2(u^2 + v^2)F(u,v) \quad (\text{km.57})$$

Laplace operaattoria käytetään esimerkiksi reunojen ilmaisuun kuvasta.

## KONVOLUUTIO JA KORRELAATIO

Tässä kappaleessa tarkastellaan kahta Fourier-muunnos suhdetta, jotka muodostavat peruslinkin spatiaali- ja taajuustasojen välillä. Nämä ovat konvoluutio ja korrelaatio. Nämä auttavat ymmärtämään taajuustason tekniikoitten kytkeytymisen spatiaalitasoon. Menetelmien

ymmärtämisen helpottamiseksi, niitä käsitellään ensin 1-ulotteisilla funktioilla ja laajennetaan sen jälkeen 2-ulotteisiin funktioihin.

## Konvoluutio

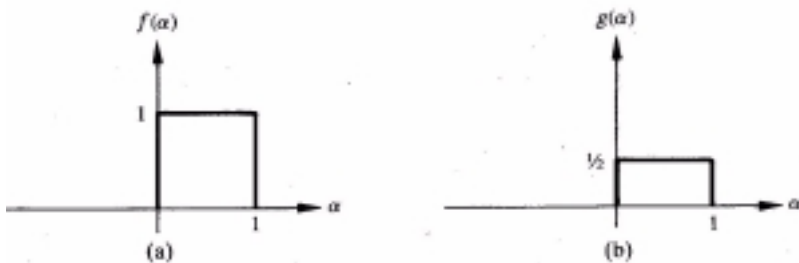
Funktioitten  $f(x)$  ja  $g(x)$  konvoluutio  $f(x)*g(x)$  määritellään

$$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x-\alpha)d\alpha \quad (\text{km.58})$$

Konvoluutiointegraalin visualisointi ei ole helppoa, joten aloitetaan esimerkillä.

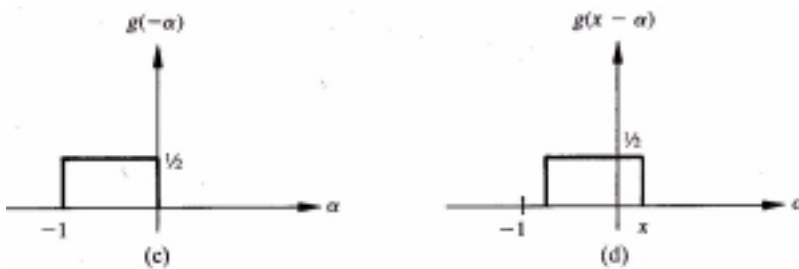
### Esimerkki

Tarkastellaan alla olevassa kuvassa km.11 olevia funktioita  $f(x)$  ja  $g(x)$  ja lasketaan niiden konvoluutio.



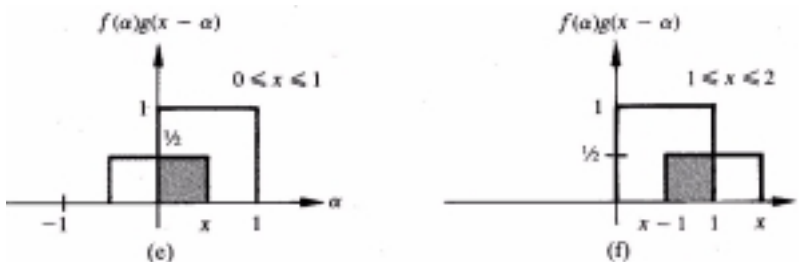
Kuva km.11 a Funktiot  $f(x)$  ja  $g(x)$ , joiden konvoluutio esimerkissä lasketaan.

Ensimmäisenä laskettaessa konvoluutiota suoritetaan toisen funktion kääntö  $x$ -akselin suhteen. Tässä tapauksessa kääntö suoritetaan funktiolle  $g(x)$ , joka muuttuu muotoon  $g(x-\alpha)$ . Konvoluutiota laskettaessa  $x$  on parametri, joka saa arvot  $-\infty$ :stä  $\infty$ :ään.



Kuva km.11 b Funktiolle  $g(x)$  suoritetaan kääntö  $x$ -akselilla  $x$ :n toimiessa parametrina.

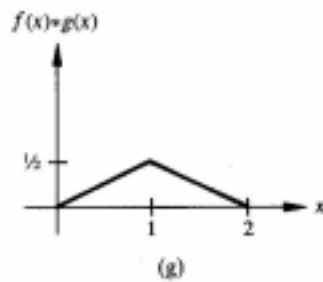
Integrointi suoritetaan kaikilla  $x$ :n arvoilla. Toisin sanoen funktio  $g(x-\alpha)$  liuutetaan funktion  $f(\alpha)$  yli ja integrointi suoritetaan kaikissa tilanteissa.



Kuva km.11 c Funktion  $g(x-\alpha)$  liuutus funktion  $f(\alpha)$  yli.

Konvoluutiointegraalilla lasketaan funktioitten yhteisen osuuden pinta-alaa eri  $x$ :n arvoilla.





Kuva km.11 d Funktioitten  $f(x)$  ja  $g(x)$  konvoluution tulos.

Eräs myöhemmin käytettävä konvoluution sovellutus on näytteenotossa, jossa käytetään toisena funktiona  $g(x)$  Diracin  $\delta$ -funktiota. Konvoluutio on tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad (\text{km.59})$$

Funktio  $\delta(x-x_0)$  määritellään muulloin 0:ksi paitsi arvolla  $x_0$  ja sen integraalin arvo on

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} \delta(x-x_0)dx = 1 \quad (\text{km.60})$$

Useimmissa tapauksissa voidaan sanoa, että funktio  $\delta(x-x_0)$  on impulssi pisteessä  $x=x_0$  ja sen arvo on sama kuin funktion  $f(x)$  arvo tässä pisteessä. Graafisesti impulssia symboloidaan nuolella, jonka korkeus vastaa impulssin arvoa. Kuvassa km.12 on esimerkki impulssista, joka on pisteessä  $x_0$  ja jonka arvo on  $A$ .

### Esimerkki

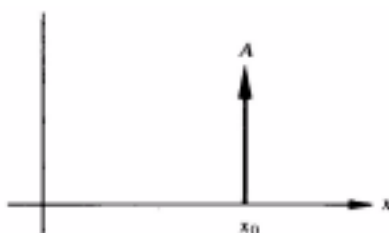
Tarkastellaan suorakaidefunktiota  $f(x)$ , jonka korkeus on  $A$  ja leveys  $a$ . Funktio  $f(x)$  konvoloidaan impulssijonon  $g(x) = \delta(x+T) + \delta(x) + \delta(x-T)$  kanssa. Konvoluution seurauksena funktio  $f(x)$  kopioituu pisteistä  $-T$  ja  $T$  alkaen. Lisäksi alkuperäinen funktio  $f(x)$  säilyy. Funktioitten  $f(x)$  ja  $g(x)$  konvoluutio on esitetty kuvassa km.13.

Konvoluution merkitys piilee siinä, että  $f(x) * g(x)$  ja  $F(u)G(u)$  muodostavat Fourier-muunnosparin, jos  $F(u) = F\{f(x)\}$  ja  $G(u) = F\{g(x)\}$ .

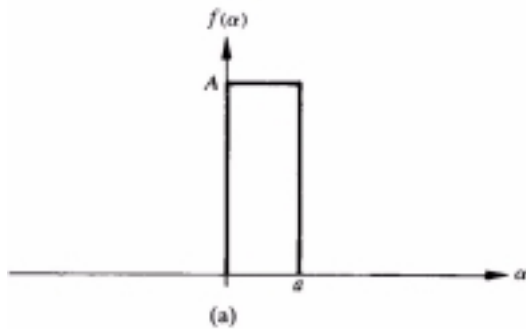
$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u) \quad (\text{km.61})$$

sama pätee myös toisinpäin

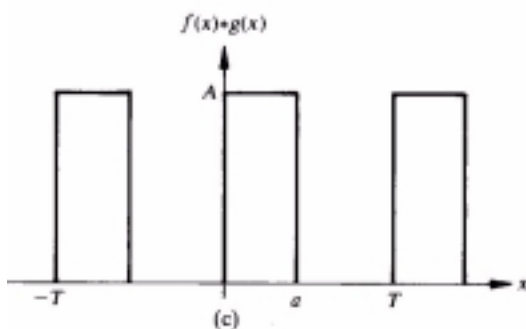
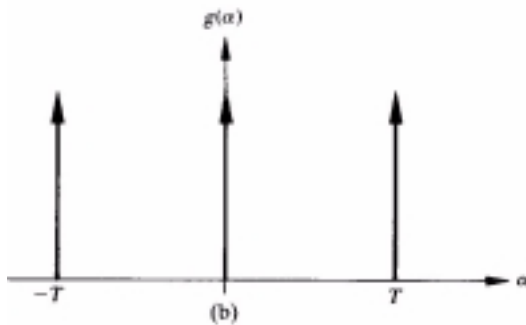
$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u)*G(u) \quad (\text{km.62})$$



Kuva km.12 Funktion  $A\delta(x-x_0)$  graafinen esitys.



Kuva km.13 Esimerkki, jossa konvoluution avulla monistetaan suorakaidefunktiota  $f(x)$  konvolvoimalla se impulssijonon  $g(x) = \delta(x + T) + \delta(x) + \delta(x - T)$  kanssa.



Yhtälöiden (km.61) ja (km.62) tulosta sanotaan yleisesti konvoluutioteoreemaksi.

Oletetaan, että funktiot  $f(x)$  ja  $g(x)$  ovat diskreettejä merkkijonoja, joiden pituudet ovat  $f(x) = \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(A-1)\}$  ja  $g(x) = \{g(0), g(1), g(2), \dots, g(B-1)\}$ . Kuten aikaisemmin todettiin, diskreetti Fourier-muunnos ja käänteinen diskreetti Fourier-muunnos ovat jaksollisia. Konvoluutioteoreema edellyttää olettamaan, että funktiot  $f(x)$  ja  $g(x)$  ovat jaksollisia jollakin jakson pituudella  $M$ . Konvoluution tulos on jaksollinen ja jakson pituus on sama  $M$ . Voidaan osoittaa, että ellei

$$M \geq A + B - 1 \quad (\text{km.63})$$

konvoluution yksittäiset jaksot laskostuvat. Ilmiö tunnetaan englanninkielisellä termillä wraparound virhe. Koska oletettiin, että jakson täytyy olla suurempi kuin  $A$  tai  $B$ , täytyy näytteistetyt funktiot saattaa yhtä pitkiksi lisäämällä loppuun nollia niin, että kummankin pituus on  $M$ . Nollien lisäyksellä saadaan sekvenssit

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

ja

$$g_c(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

Perustuen näihin nolilla täydennettyihin sekvensseihin, funktioiden  $f(x)$  ja  $g(x)$  diskreetti konvoluutio on

$$f_c(x) * g_c(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_c(m) g_c(x-m) \quad (\text{km.64})$$

jossa  $x = 1, 1, 2, \dots, M-1$ . Konvoluutiofunktio on diskreetti ja jaksollinen merkkijono, jonka pituus on sama kuin jakson pituus  $M$ . Diskreetti konvoluutio on periaatteessa sama kuin jakuvakin konvoluutio. Ainoa ero on, että diskreetissä konvoluutiossa käsitellään diskreettejä arvoja.

### Esimerkki

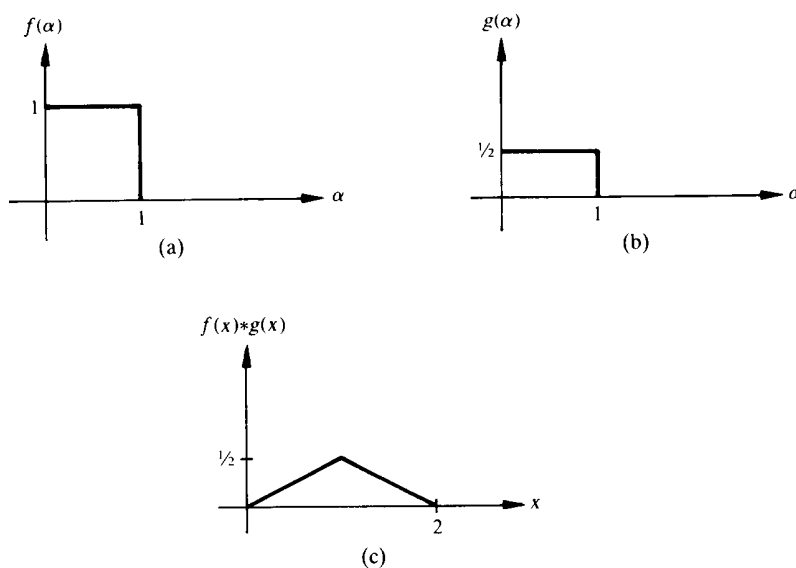
Kuvassa km.14 on esitetty graafisesti sekä jatkuva että diskreetti konvoluutio. Diskreetissä tapauksessa kummankin funktion  $f(x)$  ja  $g(x)$  pituus on  $A$  näytettä välillä 0 ja 1. Oletettu jakson pituus  $M = A + B - 1 = 2A - 1$ .

Diskreetti konvoluutio on jaksollinen ja koska  $M = 2A - 1$ , jaksot eivät mene päällekkäin. Jos valittaisiin  $M > 2A - 1$ , saataisiin jaksojen välille suurempi erotus.

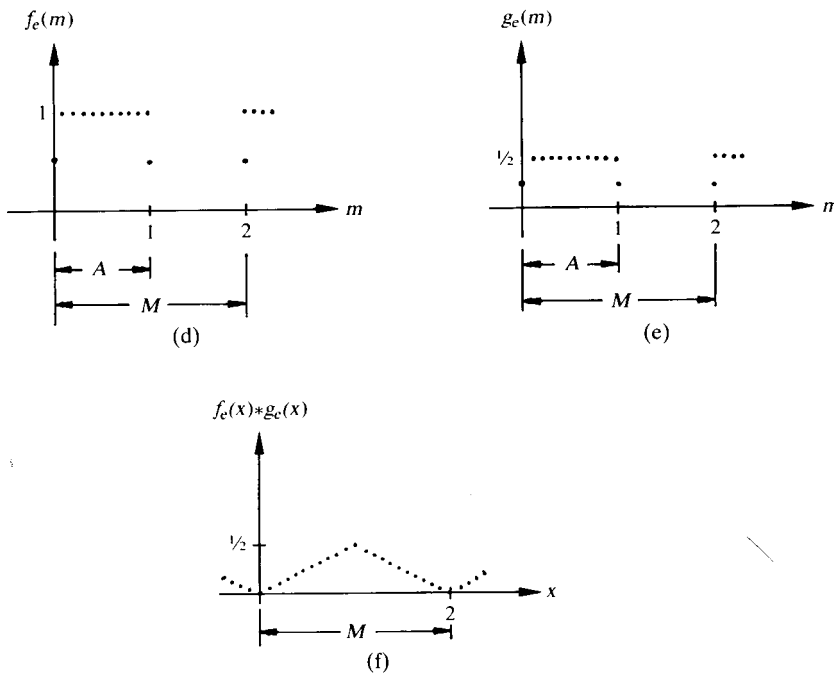
Kaksiulotteinen konvoluutio on muodoltaan samanlainen kuin yhtälön (km.58) mukainen yksiulotteinen konvoluutio. Siten funktioitten  $f(x, y)$  ja  $g(x, y)$  konvoluutio on

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{km.65})$$

Kaksiulotteinen konvoluutioteoreema on vastaavasti.



Kuva km.14 a Esimerkissä lasketun diskreetin konvoluution arvoilla laskettu jatkuva konvoluutio.



Kuva km.14 b Esimerkissä laskettu diskreetti konvoluutio.

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) G(u, v) \quad (\text{km.66})$$

ja

$$f(x, y) g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v) \quad (\text{km.67})$$

Kuvassa km.15 on esimerkki kaksiulotteisesta konvoluutiosta. Kuvassa esitetään 2-ulotteisessa konvoluutiosta tarvittavat kääntö, liuutus ja kertomisoperaatiot.

Kaksiulotteinen diskreetti konvoluutio määritellään diskreeteille funktioille  $f(x, y)$  ja  $g(x, y)$ , joiden koot ovat samassa järjestyksessä  $A \times B$  ja  $C \times D$ . Kuten yksiulotteisessa tapauksessa, funktiot on oletettava jaksollisiksi ja jaksojen pituudet ovat  $M$  ja  $N$   $x$  ja  $y$  akselien suunnissa. Jaksojen päällekkäin meno konvoluutiosta estyy, jos

$$M \geq A + C - 1 \quad (\text{km.68})$$

ja

$$N \geq B + D - 1 \quad (\text{km.69})$$

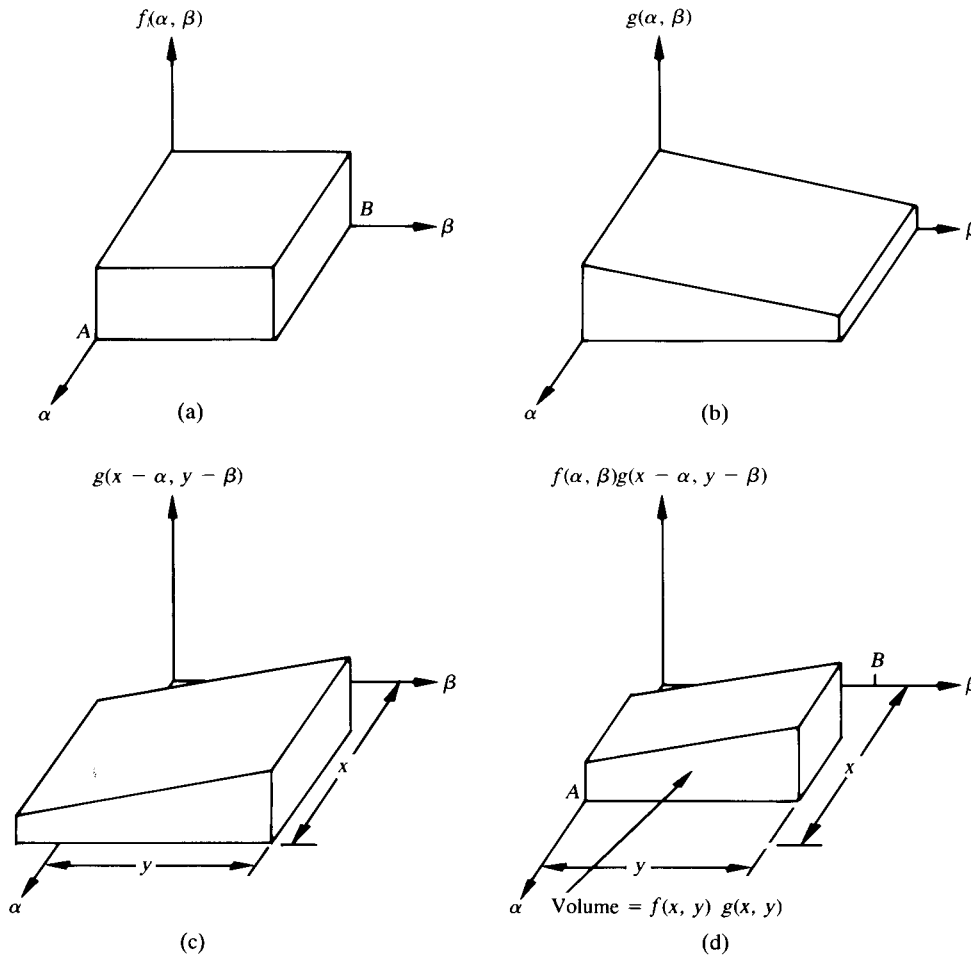
Jaksolliset sekvenssit muodostetaan täydentämällä funktioita  $f(x, y)$  ja  $g(x, y)$  nolilla seuraavasti

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \quad \text{ja} \quad B \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (\text{km.70})$$

ja

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1 \quad \text{ja} \quad D \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (\text{km.71})$$

Kaksiulotteinen funktioitten  $f_e(x, y)$  ja  $g_e(x, y)$  konvoluutio määritellään



Kuva km.15 Kaksiulotteinen konvoluutio

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x - m, y - n) \quad (\text{km.72})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  ja  $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Kaksiulotteinen konvoluutio on jaksollinen ja yhtälön (km.72) antama  $M \times N$  tulos on yksi jakso. Yhtälöt (km.68) ja (km.69) antavat ehdon jolloin laskostumista ei tapahdu. Kuten yksiulotteisessakin tapauksessa, konvoluutioteoreema on voimassa myös 2-ulotteiselle diskreetille konvoluutiolle jolloin  $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  ja  $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Kaikissa laskuissa käytetään täydennettyjä funktioita  $f_e(x, y)$  ja  $g_e(x, y)$ .

Konvoluutioteoreeman merkitys on siinä, että konvoluutio voidaan suorittaa taajuustasossa. Tämä edellyttää funktioitten  $f_e(x, y)$  ja  $g_e(x, y)$  Fourier-muunnosta, jonka jälkeen suoritetaan kertolaskut. Tämän jälkeen lasketaan käänteinen Fourier-muunnos. Käytettäessä nopeaa Fourier-muunnosta, saavutetaan jo varsin pienillä pikselimäärillä merkittäviä laskennallisia säästöjä ja siten nopeampia operaatioita. Brigham [1974] on osoittanut, että FFT menetelmä on nopeampi kun kuvan koko on  $32 \times 32$ . Tämä ehto täyttyy lähes aina.

## Korrelaatio

Kahden jatkuvan funktion  $f(x)$  ja  $g(x)$  korrelaatio  $f(x) \circ g(x)$  määritellään

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha)g(x+\alpha)d\alpha \quad (\text{km.73})$$

jossa  $*$  tarkoittaa kompleksikonjugaattia. Yhtälöt (km.58) ja (km.73) ovat muutoin samanlaiset paitsi, että korrelaatioissa ei suoriteta  $g(x)$  kääntöä. Korrelaatioissa funktio  $g(x)$  liuutetaan funktion  $f(x)$  yli ja lasketaan integraali  $-\infty$ :stä  $\infty$ :ään kaikilla  $x$ :n arvoilla. Kuvassa km.16 valotetaan menetelmää esimerkin avulla.

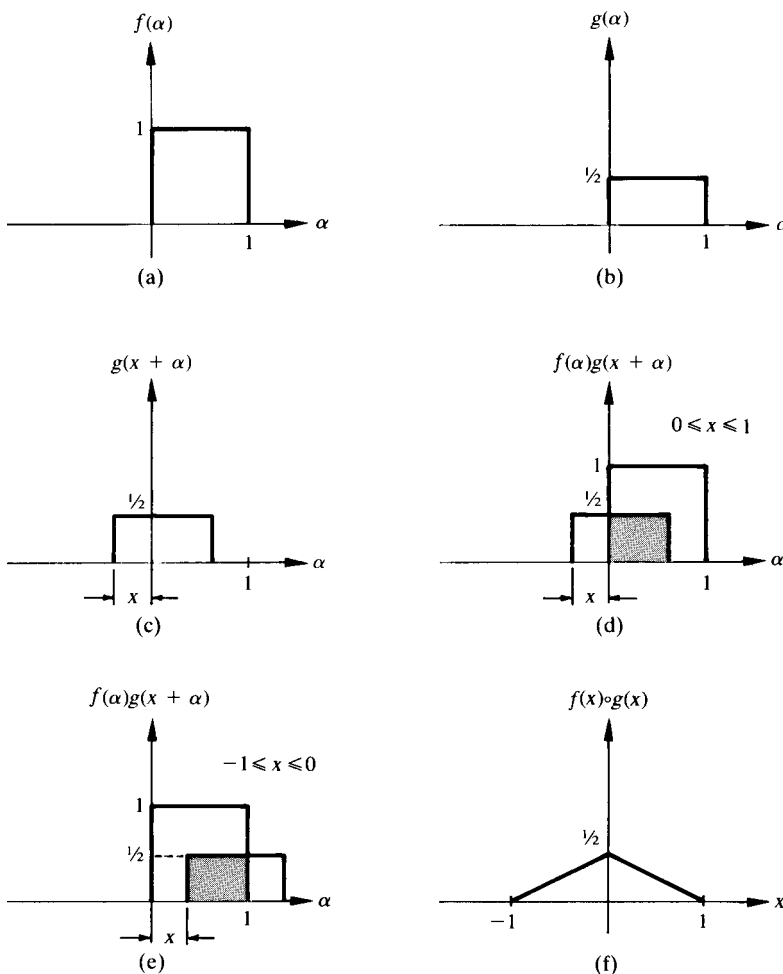
Täydennettyjen funktioiden  $f_e(x)$  ja  $g_e(x)$  diskreetti korrelaatio  $f_e(x) \circ g_e(x)$  määritellään

$$f_e(x) \circ g_e(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_e^*(m)g_e(x-m) \quad (\text{km.74})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Myös korrelaatio on jaksollinen ja sillä on samat vaatimukset laskostumisen suhteen kuin konvoluutiollakin. Jos funktioiden  $f(x)$  ja  $g(x)$  pituudet ovat  $A$  ja  $B$ , niin  $M \geq A + B - 1$ .

Jos  $f(x, y)$  ja  $g(x, y)$  ovat jatkuvien muuttujien funktioita, niin niiden korrelaatio on

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha, \beta)g(x+\alpha, y+\beta)d\alpha d\beta \quad (\text{km.75})$$



Kuva km.16 Korrelaation graafinen kuvaaminen. Diskreetissä tapauksessa täydennettyjen funktioiden

$f_e(x, y)$  ja  $g_e(x, y)$  korrelaatio  $f_e(x, y) \circ g_e(x, y)$  on

$$f_e(x, y) \circ g_e(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) g(x+m, y+n) \quad (\text{km.76})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Diskreetin konvoluution tapaan myös diskreetissä korrelaatiossa  $M$  ja  $N$  on valittava niin, että laskostumista (wraparound) ei tapahdu.

Sekä jatkuvalla että diskreetille korrelaatiolle on voimassa

$$f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) G(u, v) \quad (\text{km.77})$$

ja

$$f^*(x, y) g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ G(u, v) \quad (\text{km.78})$$

Yksi korrelaation pääkäyttötapoja on etsiä tuntemattomalle kuvalle paras tunnettu vastine. Menetelmässä tuntematonta kuvaa verrataan useaan tunnettuun kuvaan ja valitaan se, jonka korrelaatio tuntemattoman kuvan kanssa on suurin. Kuten diskreetin konvoluution tapauksessa, myös diskreetti korrelaatio on usein tehokkainta laskea taajuustasossa käyttäen FFT ja IFFT algoritmeja.

Jos verrataan jatkuvia ja diskreettejä konvoluutiota ja korrelaatiota keskenään niin määrittelystä johtuen ne eivät anna samaa tulosta. Diskreeteissä tapauksissa näytteiden väleiksi on oletettu 1. Jotta saataisiin kummassakin tapauksessa tulokseksi samat absoluuttiarvot, diskreetit funktiot (km. 64) ja (km.74) on kerrottava  $\Delta x$ :llä ja funktiot (km.72) ja (km.76)  $\Delta x \Delta y$ :llä.  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  ovat näytteiden väliset etäisyydet. Toisaalta laskettaessa vain diskreettejä konvoluutiota tai korrelaatiota, tällä skaalauksella ei ole merkitystä.

Sekä korrelaatiossa että konvoluutiiossa funktioiden  $f(x)$  ja  $g(x)$  järjestys voidaan vaihtaa ilman, että se vaikuttaa lopputulokseen. Sama koskee taajuustason funktioita.

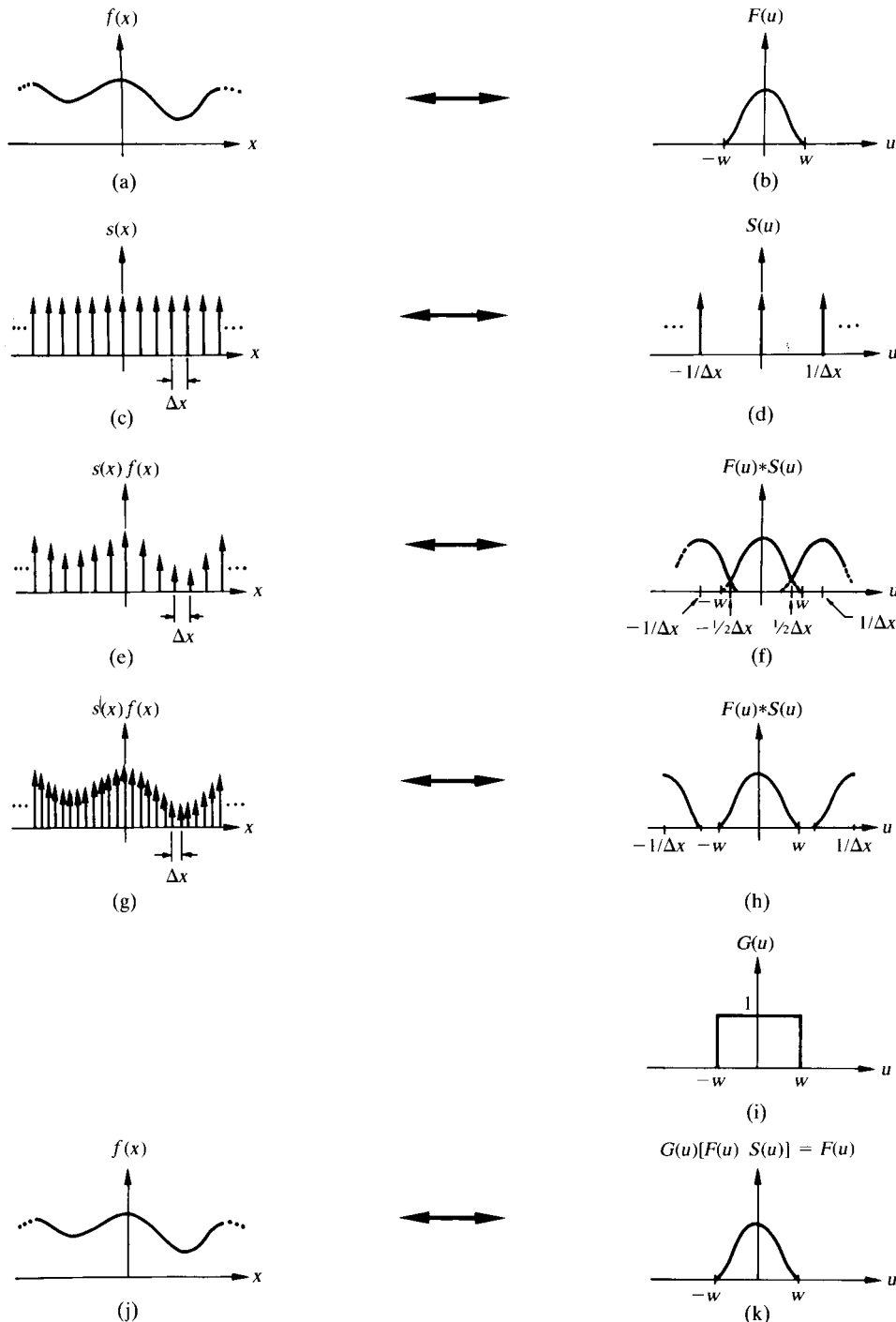
## NÄYTTEENOTTO

Aikaisemmin käsiteltiin näytteenoton perusideaa intuitiiviselta pohjalta. Fourier-muunnos ja konvoluutio antavat paremmat työkalut näytteenoton syvempään analyttiseen tarkasteluun. Erityisesti kiinnostaa tarvittavien näytteiden määrä jotta informaatiota ei menetetä näytteenotossa. Toinen ongelma on miten näytteenotto pitää suorittaa, jotta jatkuva kuva voidaan palauttaa virheettömästi näytteistä. Analyysi aloitetaan yksiulotteisilla funktioilla.

### Yksiulotteiset funktiot

Tarkastellaan kuvaa km.17. Ensimmäisessä kuvassa (a) on jatkuva funktio  $f(x)$ , jonka oletetaan olevan jatkuva  $-\infty$ :stä  $\infty$ :ään. Jatkuvan funktion  $f(x)$  Fourier-muunnoksen  $F(u)$  oletetaan olevan rajoitettu välille  $-W$  ja  $W$  (kuva km.17 (b)). Toisin sanoen funktio  $f(x)$  on **kaistarajoitettu**. Fourier-muunnos on kompleksinen, mutta tässä tarkastelu rajoitetaan itseisarvoihin.

Funktion  $f(x)$  näytteistämiseksi se kerrotaan näytteenottofunktiolla  $s(x)$ , joka on impulssijono. Impulssien välinen etäisyys on  $\Delta x$  (kuva km.17 (c)). Näytteenottofunktion  $s(x)$  Fourier-muunnos  $S(u)$  on  $-\infty$ :stä  $\infty$ :ään jatkuva impulssijono, jossa taajuuskomponenttien välinen etäisyys on  $1/\Delta x$  (kuva km.17 (d)). Konvoluutioteoreeman mukaan  $x$ -tason kertolasku on taajuustason konvoluutio. Funktioitten  $f(x)$  ja  $s(x)$  kertolaskun Fourier-muunnos



Kuva km.17 Näytteenoton graafinen johtaminen



$F\{f(x)s(x)\} = F(u)*S(u)$ . Konvoluutio-operaatio monistaa funktion  $f(x)$  spektrin  $F(u)$

$-\infty$ :stä  $\infty$ :ään  $1/\Delta x$ :n välein. Spektrin jaksollisuudesta johtuen peilikuvasektrit voivat mennä päällekkäin toistensa ja alkuperäisen spektrin kanssa (kuva km.17 (f)) jolloin alkuperäisen signaalin  $f(x)$  rekonstruktio näytteistä ei onnistu täydellisesti. Spektrien päällekkäin menoa sanotaan laskostumiseksi. Jotta näin ei tapahtuisi, täytyy näytteenottovälin  $\Delta x$  ja signaalin spektrin suurimman komponentin  $W$  välillä vallita epäyhtälö

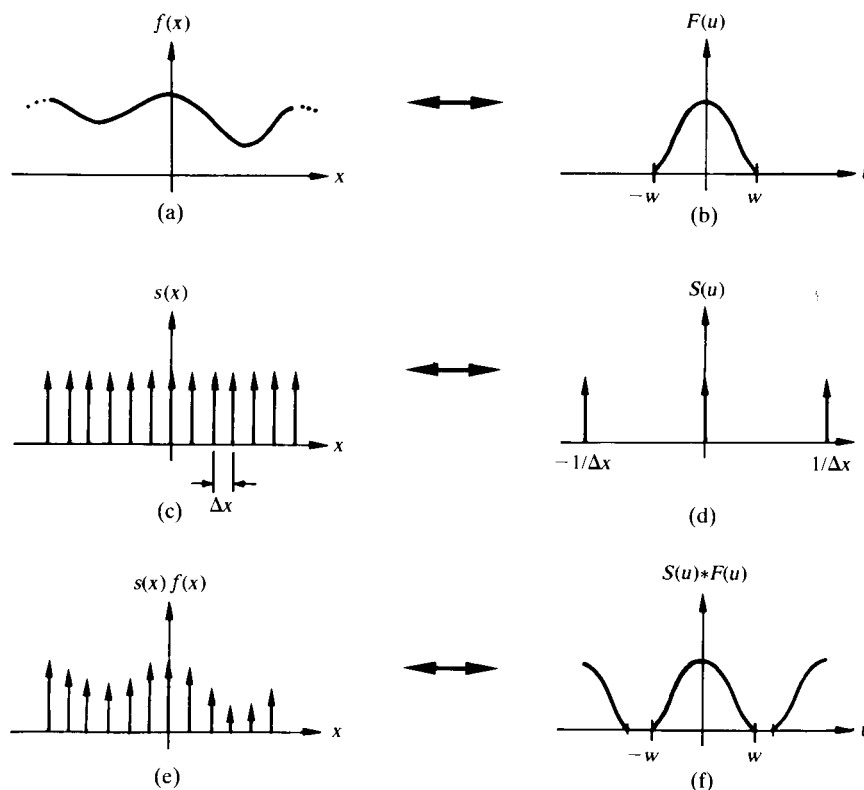
$$\Delta x < \frac{1}{2W} \quad (\text{km.79})$$

Tilanne, jossa yhtälön (km.79) vaatimus täyttyy, on kuvassa km.17 (h). Yhtälön (km.79) vaatimuksen täyttyessä voidaan alkuperäinen signaali  $f(x)$  palauttaa näytteistä käyttämällä suodatinta, jonka spesifikaatiot ovat

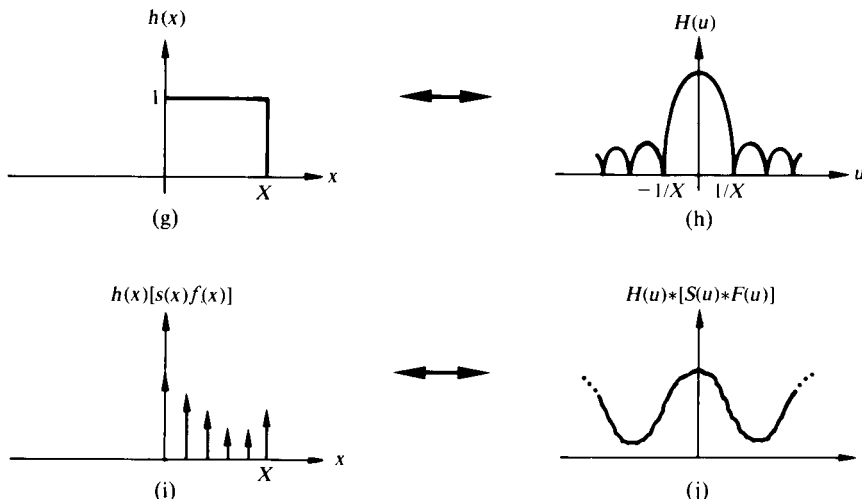
$$G(u) = \begin{cases} 1 & -W \leq u \leq W \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad (\text{km.80})$$

Alkuperäinen aikatason funktio voidaan laskea suodatetusta jaksottomasta spektristä käänteisellä Fourier-muunnoksella. Yhtälö (km.79) tunnetaan näytteenottoteoreemana ja oppikirjan kirjoittaja antaa sille nimen Whittaker - Shannonin näytteenottoteoreema.

Edellä oleva tarkastelu koskee funktioita, jotka ovat kestoltaan rajoittamattomia  $x$ -tasossa. Käytännössä ollaan kuitenkin usein kiinnostuneita näytteistämään signaali  $f(x)$  rajoitetulla osalta. Tilanne on esitetty kuvassa km.18. Kuvan kohdat a:sta f:ään ovat samat kuin kuvassa km.17 paitsi, että näytteenottoteoreeman vaatimus täyttyy.



Kuva km.18 Äärellinen näytteen-otto.



Kuva km.18 (jatkoa)  
Äärellinen näytteenotto.

Äärellinen näytteenotto välillä  $[0, X]$  voidaan esittää funktiolla

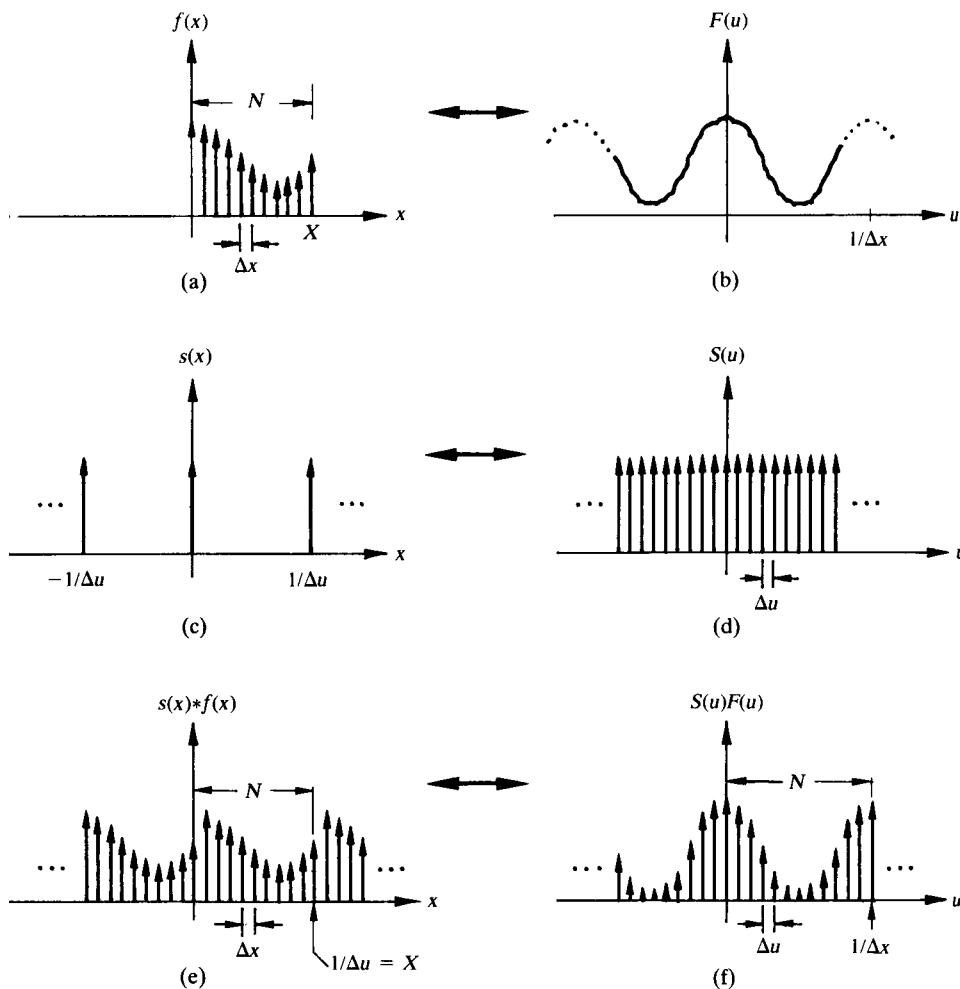
$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq X \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad (\text{km.81})$$

Funktiota sanotaan yleisesti ikkunaksi ja sen Fourier-muunnos on kuvassa km.18 (h). Ikkunafunktion käytön seuraus on kuvassa km.18 (i) ja (j). Lopullinen taajuustason tulos saadaan ottamalla konvoluutio taajuustason funktioitten  $S(u)*F(u)$  ja  $H(u)$  välillä.  $H(u)$  on ikkunafunktion  $h(x)$  Fourier-muunnos. Koska  $H(u)$ :lla on äärettömyyteen ulottuvia taajuuskomponentteja, äärellinen näytteenotto aiheuttaa taajuustasossa säröytymistä. Toisin sanoen vaikka näytteenottoteoreeman vaatimus on täytetty niin äärellinen näytteenotto aiheuttaa, ettei funktiota voida palauttaa täysin näytteistä. Näissä olosuhteissa alkuperäinen spektri voidaan erottaa vain, jos  $f(x)$  on kaistarajoitettu ja jaksollinen ja jakso on  $X$ . Tässä tapauksessa ikkunan  $H(u)$  aiheuttama säröytyminen voidaan välttää ja funktio  $f(x)$  voidaan palauttaa näytteistä jos näytteenottoteoreeman vaatimus täyttyy. Palautettu funktio on nolasta poikkeava edelleen  $-\infty$ :stä  $\infty$ :ään riippumatta  $h(x)$ :stä. Tämä johtaa merkittävään johtopäätökseen: **mikään äärellisen mittainen funktio ei voi olla kaistarajoitettu**. Toisin päin sama asia, funktio, joka on kaistarajoitettu, täytyy ulottua  $x$ -tasossa  $-\infty$ :stä  $\infty$ :ään.

Funktion  $f(x)$  jaksollisuus voidaan johtaa myös toisinpäin. Tulokset taajuustasossa ovat luonteeltaan jatkuvia (kuva km.19 (b)). Diskreetti Fourier-muunnos saadaan yksinkertaisesti näytteistämällä jatkuva muunnos impulssijonolla, jossa impulssien väli on  $\Delta u$ .

Kuten aikaisemmin todettiin, näytteenotto voidaan esittää impulssijonon ja kiinnostavan signaalin kertolaskuna. Tässä tapauksessa kertolasku  $F(u) \times S(u)$  antaa tuloksen, joka on esitetty kuvassa km.19 (f). Vastaava operaatio  $x$ -tasossa on konvoluutio, joka johtaa kuvassa km.19 (e) olevaan tulokseen. Tämä funktio on jaksollinen ja jakson pituus on  $1/\Delta u$ . Jos funktioista  $f(x)$  ja  $F(u)$  on otettu  $N$  näytettä tasavälein, silloin  $N\Delta x = X$   $x$ -tasossa ja  $N\Delta u = 1/\Delta x$  taajuustasossa. Jälkimmäinen yhtälö perustuu näytteidistetyn funktion Fourier-muunnoksen jaksolliseen ominaisuuteen jakson pituuden ollessa  $1/\Delta x$ . Siten

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} \quad (\text{km.82})$$



Kuva km.19 Diskreetin Fourier-muunnoksen graafinen esitys.

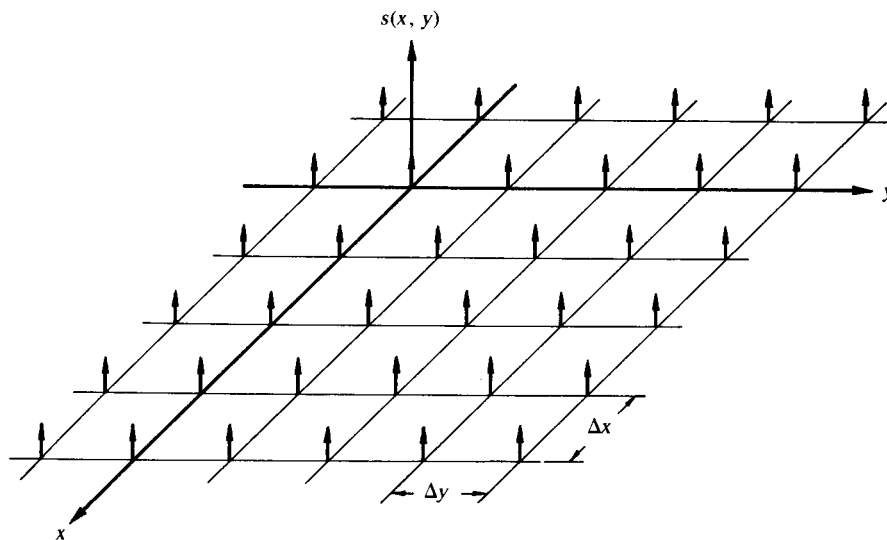
## Kaksiulotteiset funktiot

Edellä johdettu näytteenoton konsepti voidaan pienin muutoksin merkinnöissä laajentaa 2-ulotteisiin funktioihin. Kaksi-ulotteisten funktioitten  $f(x, y)$  näytteenottoprosessi voidaan muotoilla matemaattisesti käyttäen 2-ulotteista impulssifunktiota  $\delta(x, y)$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (\text{km.83})$$

Kaksi-ulotteinen näytteenottofunkti on impulssimatriisi, jossa impulssien väli  $x$  suuntaan on  $\Delta x$  ja  $y$  suuntaan  $\Delta y$ . Näytteenottofunktion on esitetty kuvassa km.20.

Funktion  $f(x, y)$ , jossa  $x$  ja  $y$  ovat jatkuvia, näytteistetty funktio saadaan tulona  $s(x, y)f(x, y)$ . Ekvivalentti operaatio taajuustasossa on funktioitten  $S(u)$  ja  $F(u)$  konvoluutio.  $S(u)$  on impulssimatriisi, jossa impulssien välinen etäisyys on  $1/\Delta x$   $u$ :n suuntaan ja  $1/\Delta y$   $v$ :n suuntaan. Jos  $f(x, y)$  on kaistarajoitettu, konvoluution tulos on ääretön matriisi, jossa alkuperäinen spektri on monistettu  $1/\Delta x$ :n ja  $1/\Delta y$ :n välein. Funktio on jaksollinen kahteen suuntaan. Tulosta on valotettu kuvassa km.21.

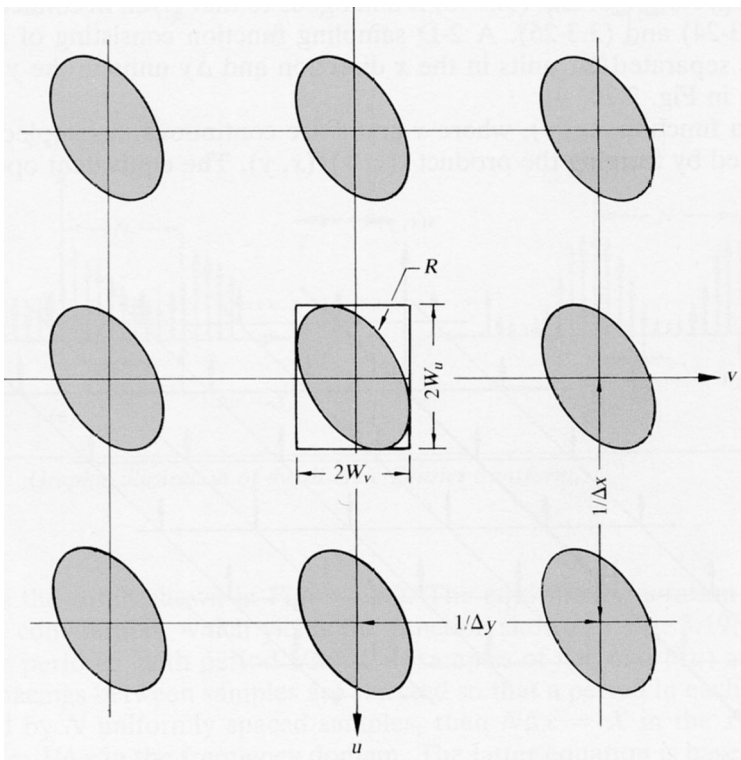


Kuva km.20 Kaksi-  
ulotteinen näyt-  
teenottofunktio.

Oletetaan, että  $2W_u$  ja  $2W_v$  ovat pienimmän neliön mitat suuntiin  $u$  ja  $v$  jonka sisään sopii jatkuvan funktion  $f(x, y)$  spektri  $R$ . Silloin, jos  $1/\Delta x > 2W_u$  ja  $1/\Delta y > 2W_v$ , voidaan yksi jakso palauttaa täydellisesti kertomalla funktio  $S(u, v) * F(u, v)$  funktiolla

$$G(u, v) = \begin{cases} 1 & (u, v) \text{ on suorakaiteen } R \text{ sisällä} \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad (\text{km.84})$$

Funktion  $G(u, v)[S(u, v) * F(u, v)]$  käänteinen Fourier-muunnos tuottaa alkuperäisen funktion  $f(x, y)$ . Edellä olevan perusteella voidaan johtaa 2-ulotteinen näytteenottooteoreema, jonka mukaan kaistarajoitettu funktio  $f(x, y)$  voidaan palauttaa näytteistä, jos niiden etäisyydet ovat



Kuva km.21 Kaksi-ulotteisen  
näytteistetyn ja kaistarajoitetun  
funktion taajuustasoesitys.

$$\Delta x \leq \frac{1}{2W_u}$$

(km.85)

ja

$$\Delta y \leq \frac{1}{2W_v} \quad (\text{km.86})$$

Kun  $f(x, y)$  on spatiaalisesti rajoitettu 2-ulotteisella ikkunalla  $h(x, y)$ , näytteistetyn funktion muunnos on säröytynyt konvoluution  $H(u, v) * S(u, v) * F(u, v)$  ansiosta. Tämä säröytyminen, joka on seurausta kuvan spatiaalisesta rajoittamisesta, tekee kuvan  $f(x, y)$  virheettömän palauttamisen näytteistä mahdolliseksi. Kuten 1-ulotteisessa tapauksessa, edellytetään jaksollista funktiota, mutta käytännössä kuvat harvoin täyttävät tätä vaatimusta.

Perusteina, jotka ovat voimassa 1-ulotteisessa tapauksessa, voidaan osoittaa jaksollisuuden ominaisuudet myös 2-ulotteisessa Fourier-muunnoksessa.  $N \times N$  kuvan tapauksessa tämä analyysi johtaa seuraavaan tulokseen.

$$\Delta u \leq \frac{1}{N\Delta x} \quad (\text{km.87})$$

ja

$$\Delta v \leq \frac{1}{N\Delta y} \quad (\text{km.88})$$

Nämä suhteet näytteiden välillä takaavat, että kokonainen 2-ulotteinen  $N \times N$  jakso katetaan sekä spatiaali- että taajuustasossa.

### NOPEA FOURIER-MUUNNOS (FFT)

Kompleksisten kertolaskujen määrä, joka tarvitaan yhtälön (km.15) toteuttamiseen, on suhteellinen  $N^2$ :een. Toisin sanoen jokainen  $u$ :n  $N$ :stä arvosta vaatii funktion  $f(x)$  kertomista tekijällä  $e^{-j2\pi ux/N}$ , jossa indeksi juoksee 0:sta  $N - 1$ :een ja lisäksi tarvitaan  $N - 1$  kompleksista yhteenlaskua. Termi  $e^{-j2\pi ux/N}$  voidaan laskea kerran ja tallettaa muistiin taulukon muotoon. Tästä syystä  $u$ :n ja  $x$ :n kertomista ei normaalisti lueta mukaan laskutoimitusten määrää laskettaessa.

Järjestämällä yhtälön (km.15) laskutoimitukset uudelleen, voidaan tarvittavien kompleksisten kertolaskujen määrä laskea niin, että niiden määrä on suhteessa  $N \log_2 N$ :ään. Uudelleen järjestettyjen laskutoimitusten algoritmia sanotaan nopeaksi Fourier-muunnokseksi, FFT. Kertolaskujen määrän putoaminen  $N^2$ :sta  $N \log_2 N$ :ään edustaa varsin merkittävää säästöä laskennassa. Taulukossa km.1 on vertailtu laskutoimitusten määriä joillakin  $N$ :n arvoilla.

Säästöä voidaan tarkastella esimerkin avulla. Oletetaan, että yleiskäyttöiseltä tietokoneelta menee 8198 pisteen FFT:n laskemiseen 5 s. Suora laskenta samalta koneelta vie aikaa 600 kertaa enemmän. Tässä tapauksessa tarvittava aika on n. 50 min.

FFT algoritmi on käsitelty kurssilla Digitaalinen suodatus eikä sitä käsitellä enempää tässä Kuvankäsittelyn kurssissa. Käytännössä kuitenkin harvoin käytetään DFT:n suoraa laskentaa vaan käytössä on lähes poikkeuksetta FFT.

Taulikko km.1 Vertailu  $N^2$ :sen ja  $N\log_2 N$  välillä joillakin  $N$ :n arvoilla

| $N$  | $N^2$<br>DFT | $N\log_2 N$<br>FFT | Laskennallinen etu<br>$N/N\log_2 N$ |
|------|--------------|--------------------|-------------------------------------|
| 2    | 4            | 2                  | 2,00                                |
| 4    | 16           | 8                  | 2,00                                |
| 8    | 64           | 24                 | 2,67                                |
| 16   | 256          | 64                 | 4,00                                |
| 32   | 1024         | 160                | 6,40                                |
| 64   | 4096         | 384                | 10,67                               |
| 128  | 16384        | 896                | 18,29                               |
| 256  | 65536        | 2048               | 32,00                               |
| 512  | 262144       | 4608               | 56,89                               |
| 1024 | 1048576      | 10240              | 102,40                              |
| 2048 | 4194304      | 22528              | 186,18                              |
| 4096 | 16777216     | 49152              | 341,33                              |
| 8192 | 67108864     | 106496             | 630,15                              |

## MUITA SEPAROITUVIA MUUNNOKSIA

Yksiulotteinen diskreetti Fourier-muunnos on yksi edustaja muunnosperheestä, jota voidaan kuvata yleisellä muunnosyhtälöllä

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)g(x,u) \quad (\text{km.89})$$

jossa  $T(u)$  on funktion  $f(x)$  muunnos,  $g(x, u)$  on **muunnoksen ydin** ja muuttuja  $u$  saa arvot  $0, 1, \dots, N-1$ . Vastavasti määritellään käänteinen muunnos

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)h(x,u) \quad (\text{km.90})$$

jossa  $h(x, u)$  on **käänteinen muunnoksen ydin** ja  $x$  saa arvot  $0, 1, \dots, N-1$ . Muunnoksen ytimen ominaisuudet määrittelevät muunnoksen luonteen.

Kaksiulotteisille neliötaulukkoille muunnos ja käänteinen muunnos ovat

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)g(x,y,u,v) \quad (\text{km.91})$$

ja

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u,v)h(x,y,u,v) \quad (\text{km.92})$$

jossa  $g(x, y, u, v)$  ja  $h(x, y, u, v)$  ovat muunnoksen ydin ja käänteisen muunnoksen ydin. Ydin riippuu vain indekseistä  $x, y, u$  ja  $v$  mutta ei funktioitten  $f(x, y)$  ja  $T(u, v)$  arvoista. Ytimet  $g(x, y, u, v)$  ja  $h(x, y, u, v)$  voidaan ajatella olevan yhtälöitten (km.90) ja (km.91) laajennusten perusfunktioit.

Muunnoksen ytimen sanotaan olevan separoituva jos

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_2(y, v) \quad (\text{km.92})$$

Lisäksi ydin on symmetrinen, jos  $g_1$  on toiminnallisesti samanlainen kuin  $g_2$ . Tässä tapauksessa yhtälö (km.92) saa muodon

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v) \quad (\text{km.93})$$

Sama koskee käänteisen muunnoksen ydintä. Tällöin yhtälöissä (km.92) ja (km.93)  $g(x, y, u, v)$  korvataan  $h(x, y, u, v)$ :llä.

Kaksiulotteinen Fourier-muunnos on yhtälön (km.90) erikoistapaus, jonka ydin on

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} e^{-j2\pi(ux+vy)/N}$$

joka on separoituva ja symmetrinen, koska

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi ux/N} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi vy/N} \quad (\text{km.94})$$

Myös käänteisen Fourier-muunnoksen ydin on separoituva ja symmetrinen.

Muunnos, jonka ydin on separoituva, voidaan laskea kahdessa vaiheessa, joista kumpikin sisältää yksiulotteisen muunnoksen. Ensiksi lasketaan yksiulotteinen muunnos pitkin jokaista funktion  $f(x, y)$  riviä, johtaen

$$T(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)g_2(y, v) \quad (\text{km.95})$$

jossa  $x, v = 0, 1, \dots, N-1$ . Seuraavaksi lasketaan yksiulotteinen muunnos pitkin jokaista saraketta, jolloin yhtälö on

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} T(x, v)g_1(x, u) \quad (\text{km.96})$$

jossa  $u, v = 0, 1, \dots, N-1$ . Tämä tulos on yhtäpitävä aikaisemmin käsitellyn muunnostekniikan kanssa. Sama lopputulos saadaan jos muunnos lasketaan ensin pitkin jokaista funktion  $f(x, y)$  saraketta ja lasketaan  $T(y, u)$  ja tämän jälkeen lasketaan  $T(u, v)$  pitkin funktion  $T(y, u)$  jokaista riviä. Käänteinen muunnos lasketaan vastaavalla tavalla, jos  $h(x, y, u, v)$  on separoituva.

Jos ydin  $g(x, y, u, v)$  on separoituva ja symmetrinen, yhtälö (km.91) voidaan kirjoittaa matriisin muotoon

$$T = AFA \quad (\text{km.97})$$

jossa  $F$  on  $N \times N$  kuvamatriisi ja  $A$  on symmetrinen  $N \times N$  muunnosmatriisi, jonka elementit  $a_{ij} = g_1(i, j)$ .  $T$  on  $N \times N$  tulostamatriisi, jossa  $u, v = 0, 1, \dots, N-1$ .

Käänteisen muunnoksen laskemiseksi yhtälö (km.97) kerrotaan edestä ja takaa käänteisellä muunnosmatriisilla  $B$

$$BTB = BAFAB \quad (\text{km.98})$$

jos  $B = A^{-1}$

$$F = BTB \quad (\text{km.99})$$

jolloin digitaalinen kuva voidaan palauttaa täysin muunnoksesta. Jos  $B \neq A^{-1}$ , yhtälö (km.98) palauttaa kuvan  $F$  estimaatin

$$\hat{F} = BAFAB \quad (\text{km.100})$$

Useat muunnokset, mukaan lukien Fourier, Walsh, Hadamar, diskreetti kosini, Haar, ja Slant, voidaan saattaa yhtälöiden (km.98) ja (km.99) muotoon. Eräs tärkeä muunnosmatriisien ominaisuus on, että ne voidaan järjestää uudelleen matriisituloiksi niin, että niissä on vähemmän nolla-alkioita verrattuna alkuperäisiin matriiseihin. Tämä vähentää redundanssia ja sitä kautta tarvittavien laskutoimitusten määrää. Laskennan väheneminen on verrannollinen FFT-algoritmillä saavutettavaan etuun. Toisin sanoen  $N \times N$  kuvan jokaisen rivin tai sarakkeen muunnoksen laskemiseen tarvitaan  $N \log_2 N$  kertolaskua. Vaikka tässä painotetaan laskennallista menetelmää, jossa lopputulos saadaan kahdella peräkkäisellä yksiulotteisella muunnoksella, sama tulos voidaan saavuttaa muotoilemalla alkuperäisiä matriiseja.

## WALSH-MUUNNOS

Kun  $N = 2^n$ , funktion  $f(x)$  diskreetti Walsh-muunnos  $W(u)$  voidaan laskea sijoittamalla ydin

$$g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \quad (\text{km.101})$$

yhtälöön (km.89), jolloin saadaan

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \quad (\text{km.102})$$

jossa  $b_k(z)$  on  $k$ :s bitti  $z$ :n binäärimuodossa. Esimerkiksi jos  $n = 3$  ja  $z = 6$  ( $110_2$ ), niin  $b_0(z) = 0$ ,  $b_1(z) = 1$  ja  $b_2(z) = 1$ . Ytimen  $g(x, u)$  arvot on listattu taulukkoon km.2 tapauksessa, jossa  $N = 8$ . Tekijää  $1/N$  ei ole huomioitu. Walsh-muunnoksen ytimen muodostama taulukko on symmetrinen matriisi, rivit ja sarakkeet ovat ortogonaalisia. Nämä ominaisuudet johtavat identtiseen käänteisen muunnoksen ytimeen lukuunottamatta tekijää  $1/N$ , jolloin

$$h(x, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \quad (\text{km.103})$$



Taulukko km.2 Yksiulotteisen Walsh-muunnoksen ydin kun  $N = 8$ 

| $u$ | $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0   |     | + | + | + | + | + | + | + | + |
| 1   |     | + | + | + | + | – | – | – | – |
| 2   |     | + | + | – | – | + | + | – | – |
| 3   |     | + | + | – | – | – | – | + | + |
| 4   |     | + | – | + | – | + | – | + | – |
| 5   |     | + | – | + | – | – | + | – | + |
| 6   |     | + | – | – | + | + | – | – | + |
| 7   |     | + | – | – | + | – | + | + | – |

Siten käänteinen Walsh-muunnos on

$$f(x) = \sum_{x=0}^{N-1} W(u) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \quad (\text{km.104})$$

Poiketen Fourier-muunnoksesta, joka perustui trigonometriin termeihin, Walsh-muunnos koostuu sarjasta perusfunktioita, jotka saavat arvot  $+1$  ja  $-1$ .

Yhtälö (km.104) voidaan todistaa yksinkertaisesti sijoittamalla yhtälö (km.102)  $W(u)$ :n tilalle. On huomattava, että yhtälöt (km.102) ja (km.104) eroavat toisistaan ainoastaan tekijän  $1/N$  osalta. Sekä Walsh-muunnoksen että käänteisen Walsh-muunnoksen laskentaan voidaan käyttää samaa algoritmia kertomalla jälkimmäinen tulos  $N$ :llä.

Kaksiulotteiset Walsh-muunnoksen ja käänteisen Walsh-muunnoksen ytimet ovat

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (\text{km.105})$$

ja

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (\text{km.106})$$

Yhtälöissä (km.105) ja (km.106) termi  $1/N^2$  on jaettu kumpaankin muunnokseen. Näin voidaan menetellä, kun kysymys on muunnosparista. Tässä muodossa yhtälöiden käyttö helpottaa laskentaa silloin kun sekä muunnos että käänteinen muunnos on yhtä todennäköistä. Muodoltaan identtiset muunnoksen ytimet johtavat myös samanmuotoisiin muunnokseen ja käänteiseen muunnokseen.

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (\text{km.107})$$

ja

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (\text{km.108})$$

Näin ollen algoritmia, joka laskee 2-ulotteisen Walsh-muunnoksen, voidaan käyttää ilman muutoksia käänteisen muunnoksen laskemiseen.

Walsh-muunnoksen ydin on separoituva ja symmetrinen, sillä

$$\begin{aligned} g(x, y, u, v) &= g_1(x, u)g_1(y, v) = h_1(x, u)h_1(y, v) \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(y)b_{n-1-i}(v)} \right] \end{aligned} \quad (\text{km.109})$$

Kaksi-ulotteinen Walsh-muunnos  $W(u, v)$  voidaan laskea kahtena peräkkäisenä 1-ulotteisena muunnoksena yhtälön (km.102) mukaisesti. Laskennassa käytetty menetelmä on samanlainen kuin Fourier-muunnosta laskettaessa.

Walsh-muunnos voidaan laskea myös nopealla algoritmilla, joka on lähes identtinen FFT:n kanssa. Ainoa ero on, että eksponenttitermit  $W = 1$  laskettaessa nopeaa Walsh-muunnosta<sup>1</sup> FWT. Nopean Walsh-muunnoksen yhtälöt ovat

$$W(u) = \frac{1}{2} [W_{\text{parillinen}}(u) + W_{\text{pariton}}(u)] \quad (\text{km.110})$$

ja

$$W(u + M) = \frac{1}{2} [W_{\text{parillinen}}(u) - W_{\text{pariton}}(u)] \quad (\text{km.111})$$

jossa  $M = N/2$ ,  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $W(u)$  on 1-ulotteisen Walsh-muunnoksen ensimmäiset  $N/2$  termiä. Todistamisen sijaan tulosta valotetaan esimerkin avulla.

### Esimerkki

Lasketaan 1-ulotteinen Walsh-muunnos tapauksessa, jossa  $N = 4$ . Lasketaan ensiksi muunnos määritelmään perustuen yhtälön (km.102) mukaan.

$$\begin{aligned} W(0) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[ f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(0)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\ W(1) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[ f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(1)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) - f(2) - f(3)] \\ W(2) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[ f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(2)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) + f(2) - f(3)] \\ W(3) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \left[ f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(3)} \right] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) - f(2) + f(3)] \end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan muunnos käyttäen yhtälöitä (km.110) ja (km.111).

$$\begin{aligned} W_{\text{parillinen}}(0) &= \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] & \text{ja} & & W_{\text{pariton}}(0) &= \frac{1}{2} [f(1) + f(3)] \\ W_{\text{parillinen}}(1) &= \frac{1}{2} [f(0) - f(2)] & \text{ja} & & W_{\text{pariton}}(1) &= \frac{1}{2} [f(1) - f(3)] \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Termin  $W$  käyttö tässä yhteydessä saattaa aiheuttaa sekaannusta. Yhteydestä kuitenkin pitäisi selvittää kulloinenkin käyttö.

Yhtälön (km.110) mukaan saadaan muunnoksen komponentit

$$W(0) = \frac{1}{2} [W_{\text{parillinen}}(0) + W_{\text{pariton}}(0)] = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

ja

$$W(1) = \frac{1}{2} [W_{\text{parillinen}}(1) + W_{\text{pariton}}(1)] = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) - f(2) - f(3)]$$

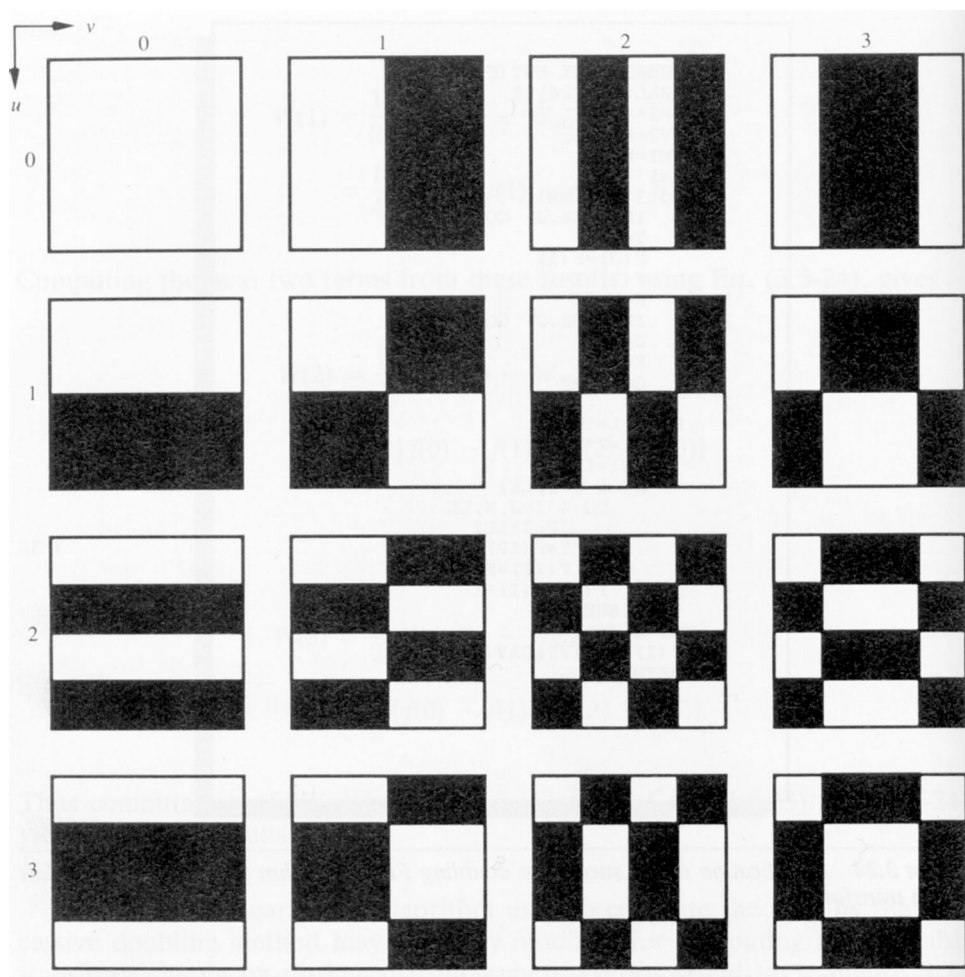
Seuraavien kahden termin laskemiseen käytetään yhtälön (km.111) tulosta

$$W(2) = \frac{1}{2} [W_{\text{parillinen}}(0) - W_{\text{pariton}}(0)] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) + f(2) - f(3)]$$

ja

$$W(3) = \frac{1}{2} [W_{\text{parillinen}}(1) - W_{\text{pariton}}(1)] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) - f(2) + f(3)]$$

Nähdään, että Walsh-muunnoksen  $W(u)$  laskenta joko yhtälöllä (km.102) tai yhtälöillä (km.110) ja (km.111) johtavat samaan lopputulokseen.



Kuva km.22 Walsh perusfunktiot kun  $N = 4$ . Jokainen lohko muodostuu  $4 \times 4$  elementistä vastaten  $x$ :ää ja  $y$ :tä, jotka saavat arvot  $0 \dots 3$ . Jokaisen lohkon origo on vasemmassa ylänurkassa. Valkoinen vastaa ykköstä ja musta nollaa.

## HADAMAR-MUUNNOS

Eräs monista 1-ulotteisen Hadamar-muunnoksen ytimen yhtälön muotoiluista on

$$g(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (\text{km.112})$$

jossa summaus eksponentissa suoritetaan modulo 2 aritmetiikalla ja kuten yhtälössä (km.101),  $b_k(z)$  on  $k$ :s bitti  $z$ :n binääriesityksessä. Sijoittamalla yhtälö (km.112) yhtälöön (km.89), saadaan 1-ulotteinen Hadamar-muunnos

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (\text{km.113})$$

jossa  $N = 2^n$  ja  $u = 0, 1, \dots, N-1$ .

Kuten Walsh-muunnoksessa niin myös Hadamar-muunnoksen ydin muodostaa matriisin, jonka rivit ja sarakkeet ovat ortogonaalisia. Tämä tilanne johtaa käänteisen muunnoksen ytimeen, joka on tekijää  $1/N$  lukuunottamatta muodoltaan sama kuin muunnoksen ydin.

$$h(x, u) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (\text{km.114})$$

Sijoittamalla tämä ydin yhtälöön (km.90), saadaan käänteinen Hadamar-muunnos

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (\text{km.115})$$

jossa  $x = 0, 1, \dots, N-1$ . Vastaavasti 2-ulotteisen muunnoksen ytimet ovat

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]} \quad (\text{km.116})$$

ja

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]} \quad (\text{km.117})$$

jossa summaus eksponentissa suoritetaan modulo 2 aritmetiikalla. Kuten Walsh-muunnoksessa niin myös Hadamar-muunnoksessa ytimet ovat identtiset. Sijoittamalla yhtälö (km.116) yhtälöön (km.91 ja yhtälö (km.117) yhtälöön (km.92) saadaan Hadamar-muunnospari.

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]} \quad (\text{km.118})$$

ja

Taulukko km.3 Hadamar-muunnoksen ytimen arvot kun  $N = 8$ 

| $u$ | $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0   |     | + | + | + | + | + | + | + | + |
| 1   |     | + | − | + | − | + | − | + | − |
| 2   |     | + | + | − | − | + | + | − | − |
| 3   |     | + | − | − | + | + | − | − | + |
| 4   |     | + | + | + | + | − | − | − | − |
| 5   |     | + | − | + | − | − | + | − | + |
| 6   |     | + | + | − | − | − | − | + | + |
| 7   |     | + | − | − | + | − | + | + | − |

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]} \quad (\text{km.119})$$

Koska sekä Hadamar-muunnos että käänteinen Hadamar-muunnos ovat muodoltaan identtiset, voidaan algorimia, jolla lasketaan  $H(u, v)$ , käyttää funktion  $f(x, y)$  laskentaan ja päinvastoin. Pitäen mielessä modulo 2 summaus voidaan osoittaa, että Hadamar-muunnoksen ydin on separoituva ja symmetrinen, joten

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v) = h_1(x, u)h_1(y, v) \\ = \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(y)b_i(v)} \right] \quad (\text{km.120})$$

Lukuunottamatta termiä  $1/\sqrt{N}$ ,  $g_1$  ja  $h_1$  ovat identtiset 1-ulotteisen Hadamar-muunnoksen ytimen kanssa yhtälössä (km.112). Lisäksi, koska 2-ulotteiset Hadamar ytimet ovat separoituvia, 2-ulotteiset muunnosparit voidaan laskea kahtena peräkkäisenä 1-ulotteisena Hadamar-muunnoksena.

Taulukossa km.3 on laskettu 1-ulotteisen Hadamar-matriisin arvot yhtälön (km.112) mukaan ja jossa vakiotermi  $1/N$  on jätetty yksinkertaisuuden vuoksi huomioimatta. Vaikka arvot ovat samat kuin Walsh-muunnoksessa niin rivien ja sarakkaiden järjestys on muuttunut. Itse asiassa kun  $N = 2^n$ , niin tämä on ainoa ero näiden kahden muunnoksen välillä. Kun  $N$  ei ole kahden kokonaisluku potenssi, ero on tärkeämpi. Walsh-muunnos voidaan määritellä mille tahansa  $N$ :n positiiviselle kokonaislukuarvolle, mutta Hadamar-muunnos on olemassa muille kuin kahden kokonaislukupotensseille vain  $N$ :n arvoon 200 saakka.

Koska useimmat kuvamuunnokset niin rivien kuin sarakkeiden suhteen perustuvat  $N = 2^n$  näytteeseen, niin Walsh- ja Hadamar-muunnokset on yhdistetty digitaalista kuvankäsittelyä koskevassa kirjallisuudessa. Termiä Walsh-Hadamar-muunnos on käytetty kuvaamaan yhtäläisyyttä.

Walsh- ja Hadamar-muunnoksilla on kuitenkin käytön kannalta kaksi merkittävää eroavuutta. Kuten Walsh-muunnoksen yhteydessä kävi ilmi, FFT-algoritmia voidaan käyttää sellaisenaan Walsh-muunnoksen laskemiseen, kun  $N$ :n sijasta käytetään lukua 1. Nopean Hadamar-muunnoksen, FHT, laskemiseksi menetelmää on muokattava enemmän, jotta

voidaan ottaa huomioon muuttunut muunnoskomponenttien järjestys. Vaihtoehtoinen lähestymistapa on käyttää FWT algoritmia ja vaihtaa lopuksi järjestys.

Vaikka Hadamar-muunnoksen järjestyksestä aiheutuu ongelmia FHT algoritmia ajatellen, niin muunnosmatriisit, jotka toteuttavat yhtälöt (km.97) ja (km.99), voidaan johtaa rekursiivisesti. Pienimmän kertaluvun Hadamar matriisi,  $N = 2$ , on

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{km.121})$$

Oletetaan, että  $H_N$  on  $N$ :nnen kertaluvun matriisi, tällöin rekursiivinen suhde  $2N$  kertaluvun matriisiin  $H_{2N}$  on

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix} \quad (\text{km.122})$$

Kertaluvun  $N$  oletetaan olevan kahden kokonaislukupotenssi. Yhtälön (km.97) muunnosmatriisi saadaan Hadamar-matriisista normalisoimalla se tekijällä  $1/\sqrt{N}$ . Tällöin  $N \times N$  tapauksessa matriiseja  $A$  ja  $H_N$  sitoo yhtälö

$$A = \frac{1}{\sqrt{N}} H_N \quad (\text{km.123})$$

Käänteinen Hadamar matriisi on identtinen yhtälöiden (km.121), (km.122) ja (km.123) kanssa.

### Esimerkki

Käyttäen yhtälöitä (km.121) ja (km.122) johdetaan Hadamar matriisi, jonka kertaluku on 8.

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

ja

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix}$$

jossa + ja – tarkoittavat + 1 ja – 1.

Kuten yhtälöt (km.112) ja (km.120) osoittavat, eroavat  $g(x, u)$  ja  $g_1(x, u)$  vain vakiokertojatermin osalta. Koska  $a_{ij} = g_1(x, u)$ ,  $A$  matriisin alkioilla on sama muoto kuin  $g(x, u)$ :lla. Tämä voidaan helposti todeta vertaamalla tässä esimerkissä taulukon km.3 arvoja ja yhtälöä

$$A = \frac{1}{\sqrt{8}} H_8$$

Etumerkin muutosten määrää pitkin Hadamar matriisin sarakkeita kutsutaan usein **sarakkeen sekvenssiksi**. Kun tämän sekvenssin arvot on johdettu ytimen arvoista, sekvenssikonsepti koskee myös  $g_1(x, u)$ :ta kun  $x, u = 0, 1, \dots, N - 1$ . Esimerkiksi matriisin  $H_8$  sekvenssit taulukossa km.3 ovat 0, 7, 3, 4, 1, 6, 2 ja 5.

Painottamalla Hadamar ydintä niin, että sekvenssi kasvaa kasvavan  $u$ :n funktiona on analoginen Fourier-muunnokselle, jossa taajuus kasvaa  $u$ :n kasvaessa. Yksi-ulotteinen Hadamar ydin, jolla saadaan tämä kasvava järjestys, on

$$g(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) p_i(u)} \quad (\text{km.124})$$

jossa

$$\begin{aligned} p_0 &= b_{n-1}(u) \\ p_1 &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u) \\ p_2 &= b_{n-2}(u) + b_{n-3}(u) \\ &\vdots \\ p_{n-1} &= b_1(u) + b_0(u) \end{aligned} \quad (\text{km.125})$$

Kuten aikaisemminkin niin summaus yhtälöissä (km.124) ja (km.125) on suoritettu modulo 2 aritmetiikalla. Yhtälöstä (km.124) johdettava tulos tapauksessa, jossa  $N = 8$ , on taulukossa km.4. Vakiotermi kertojana on yksinkertaisuuden vuoksi jätetty huomiotta ja merkit  $+$  ja  $-$  tarkoittavat  $+1$  ja  $-1$ . Rivit ja sarakkeet on järjestetty nousevien sekvenssien mukaiseen järjestykseen.

Käänteinen järjestetty Hadamar ydin on

$$h(x, u) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) p_i(u)} \quad (\text{km.126})$$

*Taulukko km.4 Järjestetyt Hadamar-muunnoksen ytimen arvot kun  $N = 8$*

| $u$ | $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0   |     | + | + | + | + | + | + | + | + |
| 1   |     | + | + | + | + | - | - | - | - |
| 2   |     | + | + | - | - | - | - | + | + |
| 3   |     | + | + | - | - | + | + | - | - |
| 4   |     | + | - | - | + | + | - | - | + |
| 5   |     | + | - | - | + | - | + | + | - |
| 6   |     | + | - | + | - | - | + | - | + |
| 7   |     | + | - | + | - | + | - | + | - |

jossa  $p_i(u)$  lasketaan yhtälön (km.125) mukaisesti. Sijoittamalla muunnoksen ydin ja käänteinen ydin yhtälöihin (km.89) ja (km.90), saadaan järjestetty Hadamar-muunnospari

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) p_i(u)} \quad (\text{km.127})$$

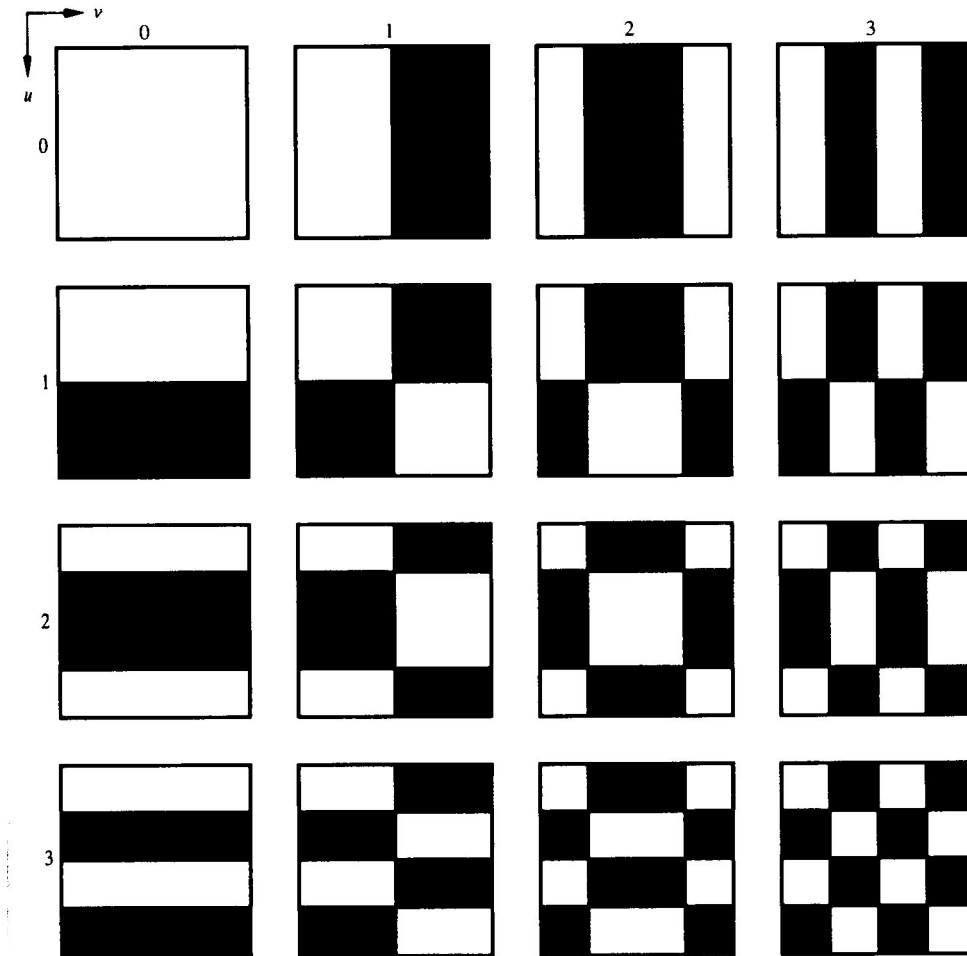
ja

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) p_i(u)} \quad (\text{km.128})$$

Kuten järjestämättömässä tapauksessa, järjestetty 2-ulotteiset ytimet ovat separoituvia ja identtisiä

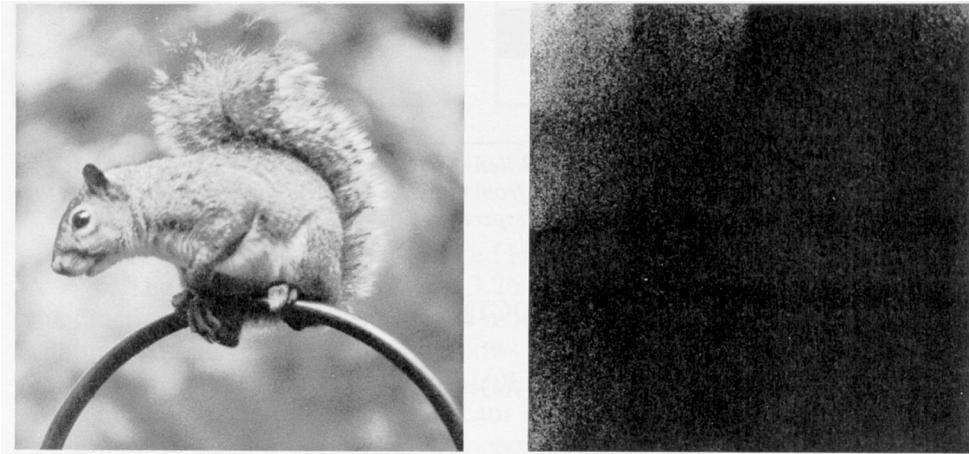
$$g(x, y, u, v) = h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) p_i(u) + b_i(y) p_i(v)]} \quad (\text{km.129})$$

Sijoittamalla nämä ytimet yhtälöihin (km.91) ja (km.92), saadaan järjestetty 2-ulotteinen Hadamar-muunnospari



Kuva km.23 Järjestetyt Hadamar perusfunktiot kun  $N = 4$ . Jokainen lohko muodostuu  $4 \times 4$  elementistä vastaten  $x$ :ää ja  $y$ :tä, jotka saavat arvot  $0 \dots 3$ . Jokaisen lohkon origo on vasemmassa ylänurkassa. Valkoinen vastaa ykköstä ja musta nollaa.





Kuva km.24 Yksinkertainen kuva ja sen Hadamar-muunnos, joka on esitetty logaritmisilla amplitudeilla.

$$H(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) p_i(u) + b_i(y) p_i(v)]} \quad (\text{km.130})$$

ja

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u,v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) p_i(u) + b_i(y) p_i(v)]} \quad (\text{km.131})$$

Kuvassa km.23 on järjestetyt Hadamar perusfunktiot kun  $N = 4$ . Perusfunktiot kuvissa km.22 ja km.23 eroavat ainoastaan järjestyksensä osalta. Kuvassa km.23 sekvenssit on järjestetty nousevaan järjestykseen, joka vaikuttaa luonnollisemmalta. Kuvassa km.24 on yksinkertainen aihe ja sen järjestetty Hadamar-muunnos. Poiketen Fourier-muunnoksesta, jossa taajuuskonsepti näyttelee merkittävää roolia, Hadamar-muunnoksella ei ole samanlaista käytännöllistä fyysistä vastinetta. Kuitenkin sekvenssi kasvaa  $u$ :n ja  $v$ :n funktiona. Lisäksi kuvassa km.24 (b) alkuperäisen kuvan uudelleenjärjestely, joka perustuu yksinkertaisiin perusfunktioihin. Nämä perusfunktiot saavat vain arvot  $+1$  ja  $-1$  huomattavasti monimutkaisempien Fourier-muunnoksen sinien ja kosinien asemesta.

## DISKREETTI KOSINI-MUUNNOS

Yksi-ulotteinen diskreetti kosinimuunnos, DCT, määritellään seuraavasti

$$C(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \quad (\text{km.132})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Vastaavasti määritellään käänteinen diskreetti kosini-muunnos

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) C(u) \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \quad (\text{km.133})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Molemmissa yhtälöissä (km132) ja (km.133)  $\alpha$  on

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{kun } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{kun } u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{km.134})$$

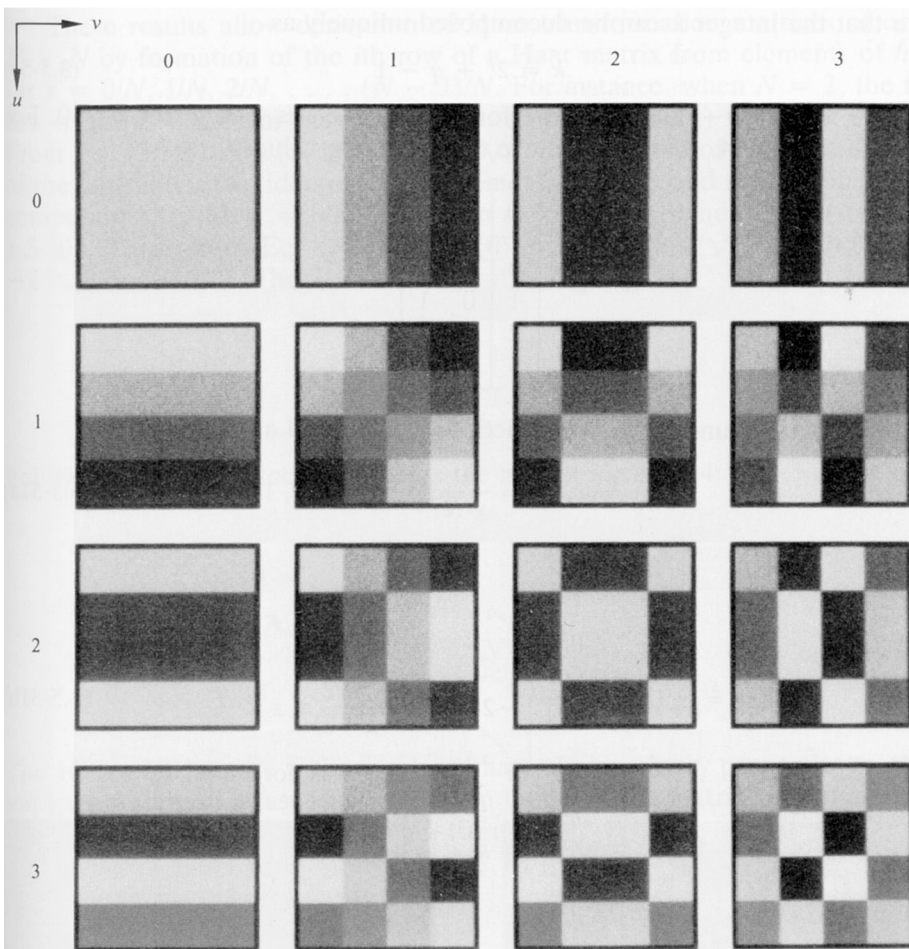
Vastaava 2-ulotteinen muunnospari on

$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right] \quad (\text{km.135})$$

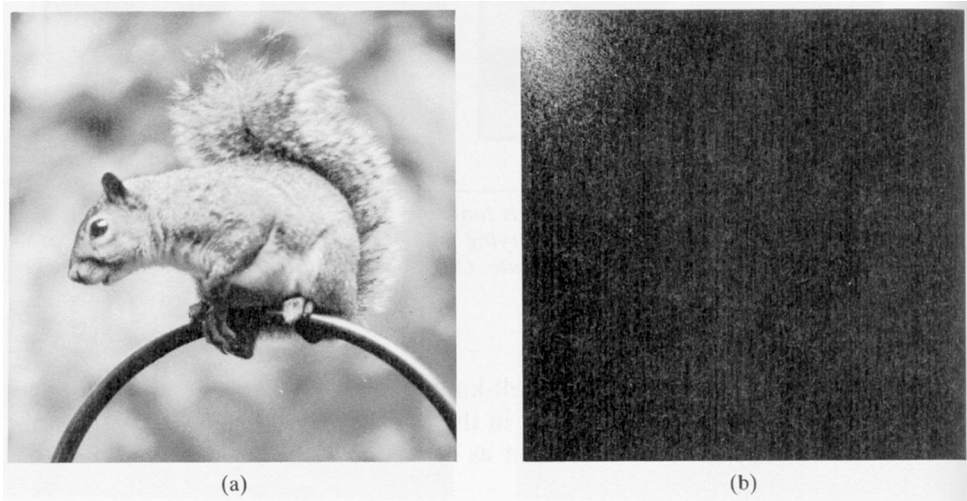
jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v) C(u, v) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right] \quad (\text{km.136})$$

jossa  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ja  $\alpha$  on annettu yhtälössä (km.134).



Kuva km.25 Diskreetin kosini-muunnoksen perusfunktiot kun  $N = 4$ . Jokainen lohko koostuu  $4 \times 4$  elementistä, jotka vastaavat  $x$ :n ja  $y$ :n muuttumista 0:sta 3:een. Lohkojen origo on vasemmassa ylänurkassa. Valkoinen vastaa muunnoksen maksimiarvoa ja musta minimiarvoa. Muut arvot on esitetty harmaasävyillä.



Kuva km.26 Yksinkertainen kuva ja sen diskreetti kosini-muunnos, joka on esitetty logaritmisilla harmaatasoilla.

Viime vuosina diskreetti kosini-muunnos on tullut suosituksi kuvadatan pakkauksessa. Kuvassa km.25 on esitetty DCT:n perusfunktioit kun  $N = 8$  ja kuvassa km.26 on puolestaan yksinkertainen kuva ja sen diskreetti kosini-muunnos. Muunnoksessa harmaatasot on kompressoitu logaritmisesti.

## HAAR-MUUNNOS

Tähänastiset muunnokset ovat hyvin tunnettuja ja niitä on käytetty paljon kuvien prosessoinnissa. Seuraavat kaksi muunnosta ovat tuntemattomampia ja niillä ei ole samanlaista käytännön merkitystä.

Haar-muunnos perustuu Haar funktioihin  $h_k(z)$ , jotka on määritelty jatkuvalla suljetulla välillä  $z \in [0, 1]$ . Muuttuja  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  ja  $N = 2^n$ . Ensimmäinen vaihe muodostettaessa Haar-muunnosta on huomioda, että kokonaisluku  $k$  voidaan järjestää uudelleen seuraavasti

$$k = 2^p + q - 1 \quad (\text{km.137})$$

jossa  $0 \leq p \leq n - 1$ ,  $q = 0$  tai  $1$  kun  $p = 0$  ja  $0 \leq q \leq 2^p$  kun  $p \neq 0$ . Esimerkiksi kun  $N = 4$ ,  $k$ ,  $q$  ja  $p$  saavat seuraavia arvoja

| $k$ | $p$ | $q$ |
|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   |
| 1   | 0   | 1   |
| 2   | 1   | 1   |
| 3   | 1   | 2   |

Tällä taustalla Haar-muunnoksen funktiot ovat

$$h_0(z) \stackrel{\Delta}{=} h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{kun } z \in [0, 1] \quad (\text{km.138})$$

ja

$$h_k(z) \stackrel{\Delta}{=} h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & \frac{q-1}{2^p} \leq z < \frac{q-1/2}{2^p} \\ -2^{p/2} & \frac{q-1/2}{2^p} \leq z < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{muulloin kun } z \in [0, 1] \end{cases} \quad (\text{km.139})$$

Näillä voidaan johtaa  $N \times N$  Haar muunnosmatriisit muodostamalla  $i$ :s rivi  $h_i(z)$  elementeistä kun  $z = 0/N, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N$ .

### Esimerkki

Lasketaan  $2 \times 2$  Haar matriisi. Ensimmäinen rivi lasketaan  $h_0(z)$ :sta kun  $z = 0/2$  ja  $1/2$ . Yhtälöstä (km.138) saadaan  $h_0(z) = 1/\sqrt{2}$  ja se on riippumaton  $z$ :sta jolloin ensimmäisen rivin alkiot ovat kumpikin  $1/\sqrt{2}$ . Toinen rivi lasketaan  $h_1(z)$ :sta kun  $z = 0/2$  ja  $1/2$ . Kun  $k = 1$ ,  $p = 0$  ja  $q = 1$ , saadaan yhtälöstä (km.139)  $h_1(0) = 2^0/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$  ja  $h_1(1) = -2^0/\sqrt{2} = -1/\sqrt{2}$ . Nyt  $2 \times 2$  Haar matriisi on

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Käyttäen samanlaista menetelmää, voidaan johtaa Haar matriisi, jossa  $N = 4$ .

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Haar matriisit ovat ortogonaalisia ja ne sallivat nopean Haar algoritmin.

### SLANT-MUUNNOS

$N \times N$  Slant muunnosmatriisi voidaan johtaa rekursiivisesti seuraavasti

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 1 & 0 & \\ a_N & b_N & 0 & -a_N & b_N & 0 \\ 0 & 0 & I_{(N/2)-2} & 0 & 0 & I_{(N/2)-2} \\ 0 & 1 & & 0 & -1 & \\ -b_N & a_N & 0 & b_N & a_N & 0 \\ 0 & 0 & I_{(N/2)-2} & 0 & 0 & -I_{(N/2)-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{N/2} & 0 \\ 0 & S_{N/2} \end{bmatrix} \quad (\text{km.140})$$

jossa  $I_M$  on  $M \times M$  identiteettimatriisi ja

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{km.141})$$

Kertoimet  $a_N$  ja  $b_N$  ovat

$$a_N = \sqrt{\frac{3N^2}{4(N^2 - 1)}} \quad (\text{km.142})$$

ja

$$b_N = \sqrt{\frac{N^2 - 4}{4(N^2 - 1)}} \quad (\text{km.143})$$

kun  $N > 1$ . Esimerkkinä yhtälöiden (km.142) ja (km.143) on Slant Matriisi  $S_4$

$$S_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{1} & \frac{1}{-1} & \frac{1}{-3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{1} & \frac{-1}{-3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{-1} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Slant matriisit ovat ortogonaalisia ja ne mahdollistavat nopean Slant-muunnoksen.

## HOTELLING-MUUNNOS

Aikaisemmin käsitellyistä muunnoksista poiketen Hotelling-muunnos<sup>2</sup> perustuu vektoresityksen tilastollisiin ominaisuuksiin. Hotelling-muunnoksella on useita sellaisia ominaisuuksia, jotka tekevät sen erityisen sopivaksi kuvan käsittelyyn.

Tarkastellaan satunnaisvektorien populaatiota, jonka muoto on

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{km.144})$$

Populaation keskiarvovektori määritellään

$$m_x = E\{x\} \quad (\text{km.145})$$

jossa  $E\{\arg\}$  on argumentin odotusarvo ja alaviitta  $x$  osoittaa, että  $m$  liittyy populaatioon  $x$ . Vektorin tai matriisin odotusarvo saadaan ottamalla odotusarvo jokaisesta elementistä.

Vektoripopulaation kovarianssimatriisi määritellään

$$C_x = E\{(x - m_x)(x - m_x)^T\} \quad (\text{km.146})$$

<sup>2</sup> Tämä muunnos tunnetaan myös nimillä ominaisvektori-, pääkomponentti tai diskreetti Karhunen-Loève-muunnos.

jossa  $T$  tarkoittaa vektorin transpoosia. Koska  $x$  on  $n$ -ulotteinen,  $C_x$  ja  $(x - m_s)(x - m_s)^T$  ovat matriiseja joiden kertaluvut ovat  $n \times n$ . Matriisin  $C_x$  alkio  $c_{ii}$  on vektoripopulaation  $x$  vektorin  $x_i$  alkion varianssi ja alkio  $c_{ij}$  on  $x$  vektorin alkioiden  $x_j$  ja  $x_i$  kovarianssi. Matriisi  $C_x$  on reaallinen ja symmetrinen. Jos alkio  $x_j$  ja  $x_i$  eivät korreloi, on niiden kovarianssi nolla ja  $c_{ij} = c_{ji} = 0$ .

$M$ :n satunnaisten vektorin populaation keskiarvovektori ja kovarianssimatriisi voidaan laskea näytteistä seuraavasti

$$m_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k \quad (\text{km.147})$$

ja

$$C_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k x_k^T - m_x m_x^T \quad (\text{km.148})$$

### Esimerkki

Yhtälöiden (km.147) ja (km.148) mekanismin valottamiseksi tarkastellaan neljää pystyvektoria  $x_1 = (0, 0, 0)^T$ ,  $x_2 = (1, 0, 0)^T$ ,  $x_3 = (1, 1, 0)^T$  ja  $x_4 = (0, 0, 0)^T$ , joissa transpoosia on käytetty pystyvektorien kirjoittamiseksi vaakasuoraan tekstissä. Yhtälön (km.147) mukaan saadaan seuraava keskiarvovektori

$$m_x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vastaavasti sijoittamalla vektoripopulaatio yhtälöön (km.148), saadaan kovarianssimatriisi

$$C_x = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kaikki päälävistäjän alkio  $x_i$  ovat samoja, mikä osoittaa, että kaikkien populaation vektoreiden kolmen komponentin varianssi on sama. Lisäksi alkioilla  $x_1$  ja  $x_2$  ja alkioilla  $x_1$  ja  $x_3$  on positiivinen korrelaatio. Sensijaan alkioilla  $x_2$  ja  $x_3$  on negatiivinen korrelaatio.

Koska  $C_x$  on reaallinen ja symmetrinen,  $n$ :n ortonormeeratun ominaisvektorin löytäminen on aina mahdollista. Oletetaan  $e_i$  ja  $\lambda_i$ , jossa  $i = 1, 2, \dots, n$ , ovat  $C_x$ :n ominaisvektorit ja vastaavat ominaisarvot, jotka on järjestetty alenevaan järjestykseen siten, että  $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$  kun  $j = 1, 2, \dots, n$ . Oletetaan, että  $A$  on matriisi, jonka rivit on muodostettu  $C_x$ :n ominaisvektoreista niin, että ensimmäisen rivin ominaisvektori vastaa suurinta ominaisarvoa ja vastaavasti viimeinen rivi pienintä ominaisarvoa.

Oletetaan, että  $A$  on muunnosmatriisi, joka kuvaa  $x$ -vektorit  $y$ -vektoreiksi seuraavasti

$$y = A(x - m_x) \quad (\text{km.149})$$

Yhtälöä (km.149) sanotaan Hotelling-muunnokseksi. Vektorien  $y$  keskiarvo on 0, eli  
 $m_y = 0$  (km.150)

ja  $y$ :n kovarianssimatriisi voidaan laskea matriiseista  $A$  ja  $C_x$  seuraavasti

$$C_y = AC_x A^T \quad (\text{km.151})$$

Lisäksi  $C_y$  on lävistämatriisi, jonka päälävistäjän alkiot ovat  $C_x$ :n ominaisarvot

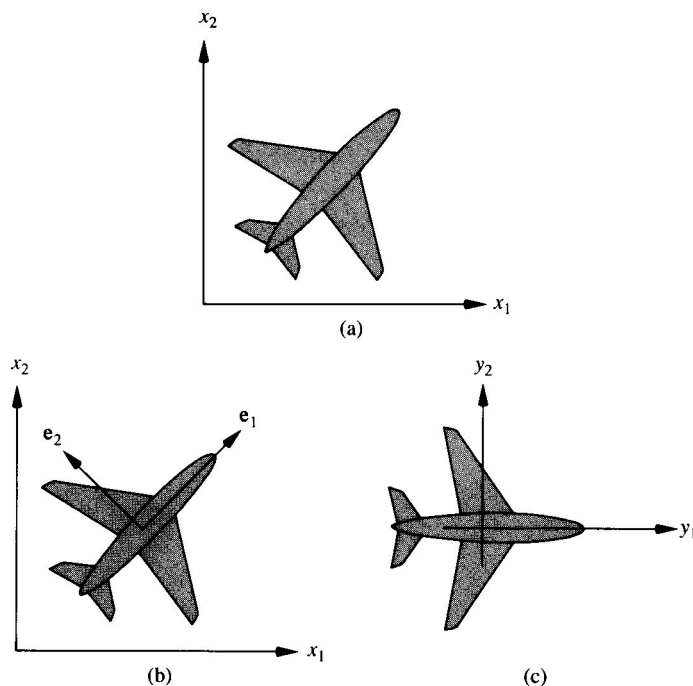
$$C_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{km.152})$$

Päälävistäjän ulkopuoliset alkiot ovat nollia, jolloin  $y$ -vektoreiden alkiot eivät korreloi. Pidetään mielessä, että  $\lambda_j$ :t ovat matriisin  $C_x$  ominaisarvot ja että, lävistämatriisin alkiot ovat sen ominaisarvot. Siten  $C_x$ :llä ja  $C_y$ :llä on samat ominaisarvot ja sama koskee ominaisvektoreita.

### Esimerkki

Kuvassa km.27 valotetaan edellä käsiteltyä konseptia. Binääriobjektia käsitellään 2-ulotteisena populaationa. Toisin sanoen jokaista objektin pikseliä on käsitelty 2-ulotteisena vektorina  $x = (a, b)^T$ , jossa  $a$  ja  $b$  ovat koordinaattien arvot  $x_1$  ja  $x_2$  akselien suuntiin. Näitä vektoreita on käytetty laskettaessa populaation keskiarvovektoreita ja kovarianssimatriisia.

Yhtälöä (km.149) käyttäen muodostetaan uusi koordinaattijärjestelmä, jonka origo on populaation keskipisteessä ja jonka akselien suunnat ovat  $C_x$ :n ominaisvektoreiden suuntiin.



Kuva km.27 Binäärikohde (a) ja sen pääakselit (ominaisvektorit) (b). Kohde käännetty yhtälöä (km.149) käyttäen.



Tämä koordinaatijärjestelmä osoittaa selvästi, että yhtälön (km.149) muunnos on kiertomuunnos, joka suuntaa datan ominaisvektoreiden avulla. Tämä suuntaaminen on mekanismi, jolla data saadaan korreloimattomaksi. Lisäksi  $C_y$ :n päälävistäjällä oleva ominaisarvo  $\lambda_I$  on  $y_i$ :n alkioiden varianssi pitkin ominaisvektoria  $e_i$ .

Kaksi-ulotteisten kohteitten suuntaaminen ominaisarvovektoreiden avulla näyttelee merkittävää roolia kuvien analysoinnissa. Sen jälkeen kun kohde on eristetty kuvasta, tietokonetekniikat kohteen tunnistamiseksi ovat herkkiä kuvan kierrolle. Koska kohde ei ole selvästikään tunnettu ennen tunnistusta, mahdollisuus suunnata kohde sen pääakselien perusteella tarjoaa luotettavan menetelmän poistaa kierrosta aiheutuvat vaikutukset kuvan käsittelyprosessista.

Toinen Hotelling-muunnoksen tärkeä ominaisuus koskee  $x$ :n ja  $y$ :n muodostamista. Koska  $A$ :n rivit ovat ortonormeerattuja vektoreita,  $A^{-1} = A^T$  ja mikä tahansa vektori  $x$  voidaan palauttaa vastaavasta  $y$ -vektorista käyttäen yhtälöä

$$x = A_K^T y + m_x \quad (\text{km.153})$$

Oletetaan, että kaikkien  $C_x$  ominaisvektoreiden asemesta matriisi  $A_K$  muodostetaan  $K$ :sta suurimmasta ominaisarvosta, jolloin saadaan muunnosmatriisi kooltaan  $K \times n$ . Tällöin  $y$ -vektori on  $K$ -ulotteinen ja  $x$ -vektorin palautus yhtälön (km.153) ei enää ole tarkka. Palautettu vektori  $\hat{x}$  käyttäen matriisia  $A_K$  on

$$\hat{x} = A_K^T y + m_x \quad (\text{km.154})$$

Voidaan osoittaa, että keskimääräinen neliövirhe vektoreiden  $x$  ja  $\hat{x}$  voidaan laskea kaavasta

$$e_{ms} = \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^K \lambda_j = \sum_{j=K+1}^n \lambda_j \quad (\text{km.155})$$

Yhtälön (km.155) ensimmäinen osa osoittaa, että virhe on nolla, jos  $K = n$ . Koska  $\lambda_j$ :t pienenevät monotoonisesti yhtälö (km.155) osoittaa myös, että virhe voidaan minimoida valitsemalla  $K$  ominaisarvoa suhteessa suurimpaan ominaisarvoon. Näin ollen Hotelling-muunnos on optimaalinen siinä mielessä, että se minimoi keskimääräisen neliövirheen vektorin  $x$  ja sen likiarvon  $\hat{x}$  välillä.

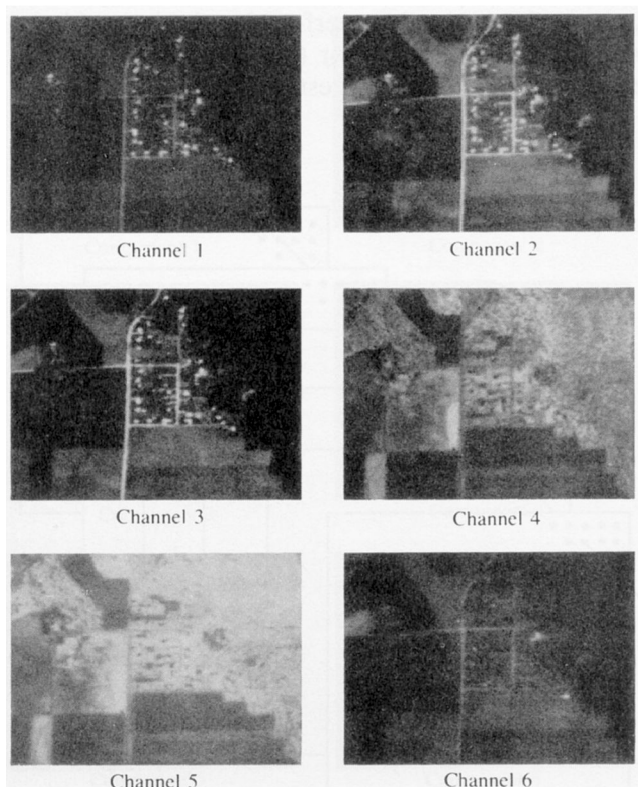
### Esimerkki

Tämä jakso päätetään esimerkkiin Hotelling-muunnoksen monipuolisuudesta kuvankäsittelyssä. Kuvassa km.28 on esimerkki, jossa kohteesta on muodostettu kuusi kuvaa eri spektrin taajuuksilla. Käytetyt aallonpituudet on taulukossa km.5. Tarkastellaan kuvaa

Taulukko km.5 Kanavien numerot ja aallonpituudet

| Kanava | Kaistan aallonpituus/ $\mu\text{m}$ |
|--------|-------------------------------------|
| 1      | 0,40 – 0,44                         |
| 2      | 0,62 – 0,66                         |
| 3      | 0,66 – 0,72                         |
| 4      | 0,80 – 1,00                         |
| 5      | 1,00 – 1,40                         |
| 6      | 2,00 – 2,60                         |

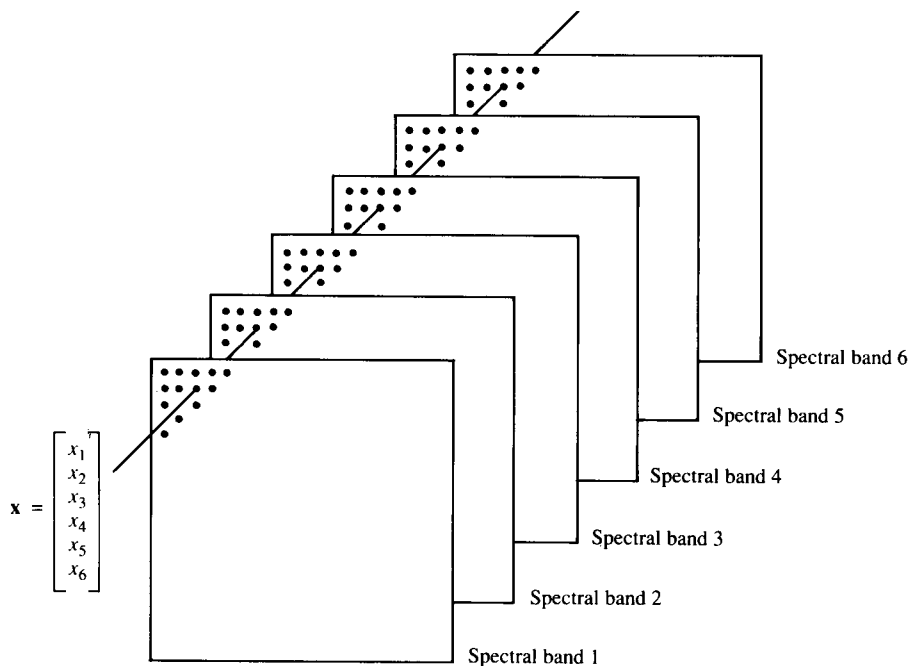




Kuva km.28 Kuusi eri taajuusalueilla otettua kuvaa samasta kohteesta.

km.29. Nähdään, että voidaan muodostaa 6-ulotteinen vektori  $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T$  jokaisesta eri kuvien vastaavista pikseleistä. Kuvien resoluutio tässä erikoistapauksessa oli  $384 \times 239$ , jolloin voitiin muodostaa 91776 vektoria. Näistä lasketaan keskiarvovektori ja kovarianssimatriisi. Taulukossa km.6 on  $C_x$ :n ominaisarvot laskevassa järjestyksessä.

Yhtälön (km.149) käyttö muodostaa joukon  $x$ -vektoreihin suhteutettuja  $y$ -vektoreita. Näistä vektoreista muodostetaan kuusi peruskomponenttikuvaa käänteisellä operaatiolla verrattuna

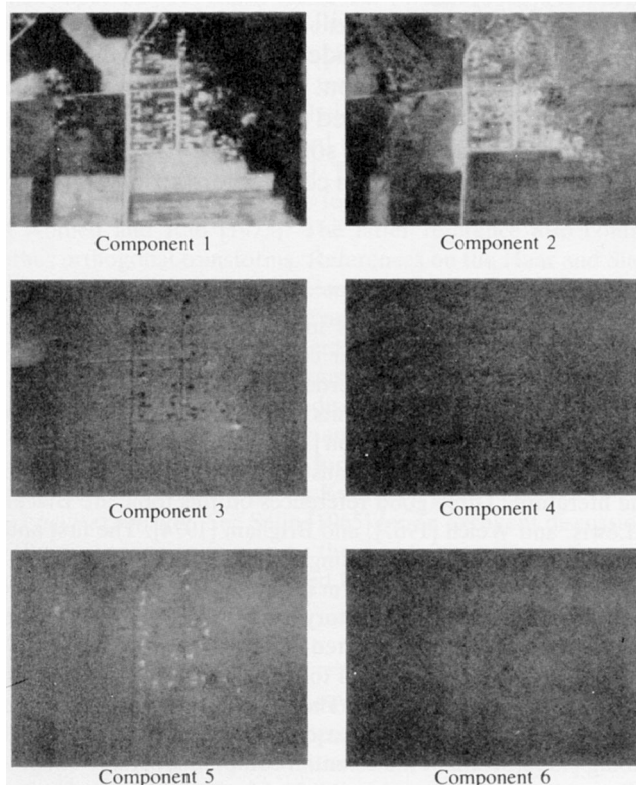


Kuva km.29 Vektoreiden muodostaminen eri kuvien vastaavista pikseleistä.

Taulukko km.6 Kuvassa km.28 olevien kuvien kovarianssimatriisin ominaisarvot

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ | $\lambda_6$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 3210        | 931,4       | 118,5       | 83,88       | 64,00       | 13,40       |

kuvaan km.29. Kuvassa km.30 on kuusi tuloskuvaa. Kuva Component 1 on muodostettu  $y_1$  vektoreista ja vastaavasti muut komponentit muista  $y_i$  vektoreista. Perus matriisiteorian mukaan  $y_1$  on saatu  $A$  matriisin ja sarakevektorin  $(x - m_x)$  pistetulona.  $A$  matriisin ensimmäinen rivi on ominaisvektori, joka liittyy populaation kovarianssimatriisin suurimpaan ominaisarvoon. Tämä ominaisarvo antaa ensimmäisen muunnetun kuvan harmaatasojen varianssin. Näin ollen perustuen taulukon km.6 arvoihin, tällä kuvalla pitäisi olla suurin kontrasti. Kuvan km.30 perusteella tämä on ilmeistä. Koska kaksi ensimmäistä kuvaa käsittää noin 94 % koko varianssista, niin neljän muun kuvan pieni kontrasti ei ole odottamatonta. Näin ollen voidaan kuuden kuvan asemesta tallettaa vain kaksi ensimmäistä käännettyä kuvaa,  $m_x$  ja kaksi ensimmäistä matriisin  $A$  riviä ja saada myöhemmin uskottava likiarvo alkuperäisistä kuvista. Tämä mahdollisuus datan kompressioon on käyttökelpoinen Hotelling-muunnoksen sivutuloksena. Nykymittapuun mukaan näin saavutettava kompressio ei kuitenkaan ole kovin suuri.



Kuva km.30 Kuusi pääkomponenttikuvaa, jotka on laskettu kuvan km.28 datasta.

# K U V A N P A R A N T A M I N E N

Raimo Jokinen

- ◆ Tausta
- ◆ Parantaminen pisteprosessina
- ◆ Spatiaalinen suodatus
- ◆ Parantaminen taajuustasossa
- ◆ Spatiaalisen maskin muodostaminen taajuustason spesifikaatioista
- ◆ Värikuvan prosessointi

*Kaikki ero aiheutuu siitä, että joku näkee pimeyden valon kautta ja toinen valon tai kirkkauden varjojen kautta.*

*David Lindsay*

Perustavoite kuvan pannustekniikoissa on prosessoida kuvaa niin, että lopputulos on kulloiseenkin tarkoitukseen paras mahdollinen. Se että kuvan prosessointi tähtää tiettyyn sovellutukseen tarkoittaa, että tehtävät ovat yleensä ongelmakeskeisiä. Tällöin menetelmä, joka on hyvin käyttökelpoinen röntgen kuvien parantamiseen, ei välttämättä ole paras lähestymistapa avaruusluotaimen Marsista lähettämien kuvien käsittelyyn.

Tässä luvussa esiteltävät menetelmät voidaan jakaa kahteen ryhmään. Ensimmäisen muodostavat **spatiaalitason** operaatiot, jotka kohdistuvat kuvan pikseleihin. Toisessa ryhmässä operaatiot kohdistetaan **taajuustasossa** kuvan Fourier-muunnokseen. Kuvan parannusmenetelmät, joissa käytetään sekä spatiaali- että taajuustason operaatioita, eivät ole harvinaisia.

Luku aloitetaan spatiaalitason menetelmillä. Tämän jälkeen käsitellään taajuustason menetelmät. Seuraavaksi pohditaan spatiaalitason maskien muodostamista taajuustason vaatimuksista lähtien. Lopuksi tarkastellaan värikuvien parannustekniikoita.

## TAUSTAA

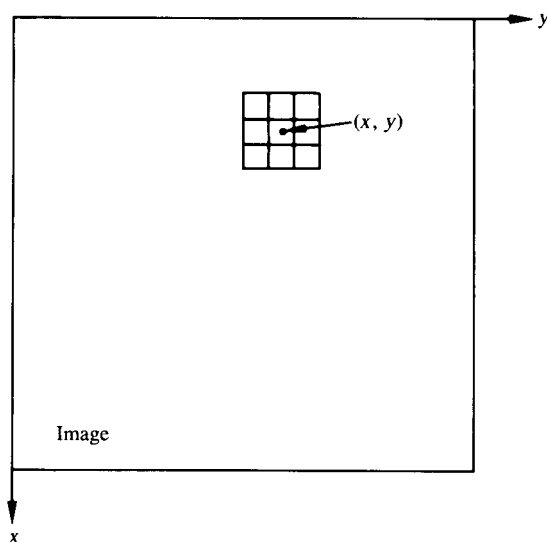
Tässä luvussa esiteltävät menetelmät perustuvat joko spatiaali- tai taajuustason tekniikoihin. Tämän luvun tarkoituksena on johtaa perusideat näihin kahteen lähestymistapaan.

## SPATIAALITASON MENETELMÄT

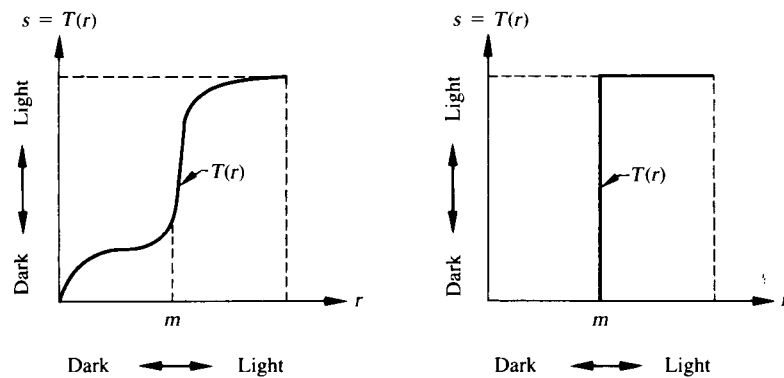
Termi spatiaalitaso viittaa pikselien joukkoon, joka muodostaa kuvan. Spatiaalitason menetelmissä operaatiot kohdistuvat suoraan näihin pikseleihin. Kuvan käsittelyfunktioita spatiaalitasossa voidaan mallintaa muunnosoperaattorilla  $T[ ]$

$$g(x,y) = T[f(x,y)] \quad (\text{kp1})$$

jossa  $f(x, y)$  on järjestelmään sisään tuleva kuva ja  $g(x, y)$  on prosessoitu kuva. Operaattori  $T$  on määritelty jossakin naapurustossa  $(x, y)$ . Lisäksi  $T$  voi operoida monen tulokuvan joukossa kuten vastinpikselien summa  $M$ :stä kuvasta kohinanvaimennuksessa.



Kuva kp.1 Pikselin  $(x, y)$   $3 \times 3$  tai 8-naapurit.



Kuva kp.2 Harmaatasen muunnosfunktiot kontrastin parantamiseksi.

Normaali menetelmä määrittellä pikselin  $(x, y)$  naapurien määrittelyä on käyttää neliön tai suorakaiteen muotoista alikuvaa, jonka keskellä pikseli  $(x, y)$  on. Määrittelyä on valotettu kuvassa kp.1. Alikuvan keskipistettä siirretään pikseli pikseliltä alkaen esimerkiksi kuvan vasemmasta ylänurkasta. Operaattorin käyttäminen pisteessä  $(x, y)$  tuottaa prosessoidun pikselin  $g(x, y)$  tässä samassa pisteessä. Naapuruston muotona käytetään joskus myös muita muotoja kuin neliötä tai suorakaidetta. Neliö ja suorakaide ovat kuitenkin yleisimmin käytetyt muodot niiden helpon toteutuksen takia.

Operaattorin  $T$  muoto on yksinkertainen kun naapuruston koko on  $1 \times 1$ . Tässä tapauksessa  $g$ :n arvo pisteessä  $(x, y)$  riippuu ainoastaan funktion  $f$  pikselistä  $(x, y)$ .  $T$  on tässä tapauksessa harmaatasomuunnosfunktio<sup>1</sup>, jonka muoto on

$$s = T(r) \quad (\text{kp.2})$$

jossa yksinkertaisuuden vuoksi  $s$  ja  $r$  ovat muuttujia, jotka kuvaavat funktioitten  $g(x, y)$  ja  $f(x, y)$  harmaatasoja kaikissa pisteissä  $(x, y)$ . Jos  $T(r)$ :llä on kuvassa kp.2 vasemmalla oleva muoto, muunnoksen seurauksena alkuperäisen kuvan kontrastin kasvaa. Tason  $m$  alapuolella olevat tasot tummenevat ja yläpuolella kirkastuvat. Tässä tekniikassa, joka tunnetaan nimellä kontrastin venytys,  $r$ :n arvot  $m$ :n alapuolella kompressoitetaan  $s$ :ssä kapealle alueelle kohti mustaa. Päinvastainen vaikutus esiintyy  $r$ :n arvoilla, jotka ovat suurempia kuin  $m$ . Rajatilanne on oikeanpuoleisessa kuvassa, jossa  $T(r)$  tuottaa kaksitasoisen (binääri) kuvan. Myös muita suhteellisen yksinkertaisia ja tehokkaita menetelmiä voidaan kehittää harmaatasojen muunnoksiin.

Koska kuvan parantaminen jokaisessa pisteessä riippuu vain pikselin harmaatasosta, tämän tyyppisiä menetelmiä sanotaan yleisesti pisteprosesseiksi.

Laajemman naapuruston käyttö sallii prosessit, jotka menevät vain kuvan parantamista pidemmälle. Riippumatta käyttötarkoituksesta yleinen lähestymistapa on, että funktion  $g$  arvo pisteessä  $(x, y)$  riippuu funktion  $f$  pikselien arvoista jossakin etukäteen määritellyssä naapurustossa, jonka keskipiste on  $(x, y)$ . Yksi pää lähestymistapa tässä tapauksessa perustuu ns. maskeiden käyttöön. Myös nimityksiä malli, ikkuna ja suodatin käytetään. Periaatteessa maski on pieni 2-ulotteinen taulukko kuten kuvassa kp.1. Taulukon kertoimien arvot määrävät prosessin luonteen kuten kuvan terävöittämisen. Parannusmenetelmät, jotka perustuvat maskien käyttöön, tunnetaan nimillä maskiprosessit tai suodatus.

<sup>1</sup> Muunnoksesta käytetään joskus myös nimitystä harmaatasokuvaus.

## TAAJUUSTASON MENETELMÄT

Taajuustason menetelmät perustuvat konvoluutioteoreemaan. Oletetaan, että  $g(x, y)$  on muodostettu suorittamalla konvoluutio funktion  $f(x, y)$  ja lineaarisen paikka invariantin<sup>2</sup> operaattorin välillä, jolloin

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad (\text{kp.3})$$

Silloin konvoluutioteoreeman mukaan operaatio voidaan suorittaa taajuustasossa seuraavasti

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (\text{kp.4})$$

jossa  $G$ ,  $H$  ja  $F$  ovat  $g$ :n,  $h$ :n ja  $f$ :n Fourier-muunnokset. Lineaaristen järjestelmien teoriassa  $H(u, v)$  on siirtofunktio. Optiikassa  $H(u, v)$  on optinen siirtofunktio ja sen itseisarvo on modulaatiosiirtofunktio.

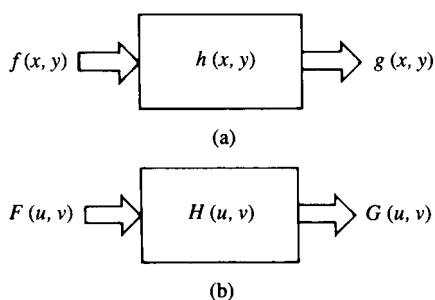
Useat kuvankäsittely ongelmat voidaan saattaa yhtälön (kp.4) muotoon. Tyypillisessä kuvan parannusongelmassa funktio  $f(x, y)$  on annettu ja tavoitteena on löytää sellainen siirtofunktio  $H(u, v)$  niin, että

$$g(x, y) = F^{-1}[H(u, v)F(u, v)] \quad (\text{kp.5})$$

korostaa jotakin  $f(x, y)$  ominaisuutta. Esimerkiksi funktion  $f(x, y)$  reunoja voidaan korostaa käyttämällä siirtofunktiota  $H(u, v)$ , joka painottaa funktion  $F(u, v)$  suurtaajuisia komponentteja.

Kuvassa kp.3 (a)  $h(x, y)$  luonnehtii järjestelmää, jonka tehtävänä on tuottaa kuva  $g(x, y)$  tulevasta kuvasta  $f(x, y)$ . Kuva  $g(x, y)$  saadaan suorittamalla konvoluutio tulevan kuvan  $f(x, y)$  ja järjestelmän  $h(x, y)$  välillä. Konvoluutioteoreema mahdollistaa konvoluution suorittamisen taajuustasossa kertomalla tulevan kuvan Fourier-muunnos  $F(u, v)$  järjestelmän siirtofunktiolla  $H(u, v)$ . Tämän jälkeen saadaan haluttu spatiaalitason kuvan ottamalla kertolaskun tuloksesta  $G(u, v)$  käänteinen Fourier-muunnos.

Oletetaan, että  $h(x, y)$  ei ole tunnettu ja järjestelmään syötetään yksikköimpulssifunktio. Yksikköimpulssin Fourier-muunnos on 1. Yhtälöiden (kp.4) ja (kp.5) mukaan  $G(u, v) = H(u, v)$ . Tällöin siirtofunktion  $H(u, v)$  käänteinen Fourier-muunnos on  $h(x, y)$ . Tulos on tuttu lineaaristen järjestelmien teoriasta. Lineaarinen paikka invariantti järjestelmä on täysin



Kuva kp.3 Lineaarisen järjestelmän operaatiot. (a) kuvassa suoritetaan impulssivasteen  $h(x, y)$  ja tulosignaalin  $f(x, y)$  konvoluutio. (b) kuvassa vastaava operaatio on tulosignaalin spektrin  $F(u, v)$  ja järjestelmän siirtofunktion  $H(u, v)$  kertolasku.

<sup>2</sup> Paikka invariantti operaattori on sellainen, jossa lopputulos riippuu vain pikselin  $f(x, y)$  arvosta mutta ei sen paikasta. Paikka invarianttisuus on ehdoton vaatimus, jotta konvoluutiota voidaan käyttää.

määritelty, jos sen impulssivaste  $h(x, y)$  on tunnettu. Optiikassa impulssivastetta sanotaan pisteen leviämiskäyräksi. Tämä nimitys juontaa juurensa optiseen ilmiöön, jossa järjestelmä sumentaa (levittää) impulssia vastaavaa valopistettä. Leviämisen määrä on optisen järjestelmän hyvyden mitta. Optinen siirtöfunktio on pisteen leviämiskäyrän Fourier-muunnos.

Yhtälö (kp.3) määrittelee spatiaalisen prosessin, mikä on analogen aikaisemmin käsitellyn maskin kanssa. Itse asiassa diskreetin konvoluution yhtälö (km.72) on perusteiltaan sama kuin kuvan kp.1 maskin siirto prosessi. Tästä syystä  $h(x, y)$ :stä on usein käytetty nimitystä spatiaalinen konvoluutiomaski. Samaa nimitystä on käytetty myös tässä luvussa aikaisemmin esitellyistä maskista. Nimitys ei tiukasti ottaen ole oikea, sillä konvoluutio edellyttää maskin kääntämistä origon suhteen. Ainoastaan symmetrinen maski täyttää täsmällisesti konvoluution vaatimuksen.

On ehkä käynyt jo ilmi, että ei ole olemassa yleistä teoriaa kuvan parantamisesta. Kun kuvaa prosessoidaan visuaalisen luettavuuden parantamiseksi, katselija on paras asiantuntija arvioimaan miten hyvin jokin erityinen menetelmä toimii. Kun kuvan laatu on hyvin subjektiivinen käsite, ei ole olemassa standardia, joka vertailisi eri algoritmien paremmuutta. Tilanne on toinen kun käsitellään koneellista kuvan tunnistusta. Esimerkiksi parhaan tekstin tunnistuksen tuloksen saavuttanut algoritmi on paras tässä mielessä. Tässäkin tapauksessa on edelleen ongelmia valita sopiva algoritmi.

## KUVAN PARANTAMINEN PISTEPROSESSINA

Kuvan parantamisen tutkiminen aloitetaan prosesseilla, jotka käsittelevän vain yhtä yksittäistä pikseliä kerrallaan. Nämä prosessit ovat kaikkein yksinkertaisimpia kuvan käsittelyn algoritmeista. Pisteprosesseissa tarkastellaan pikselin intensiteettiä  $r$  ennen prosessointia ja  $s$  jälkeen prosessoinnin.

## JOITAKIN YKSINKERTAISIA MUUNNOKSIA

Tässä jaksossa käsitellään pisteprosessien kaikkein yksinkertaisimpia algoritmeja, joita ovat

- \*\* negatiivinen kuva
- \*\* kontrastin laajentaminen
- \*\* dynamiikka-alueen kompressointi
- \*\* harmaatasojen jakaminen
- \*\* bittitasojen jakaminen

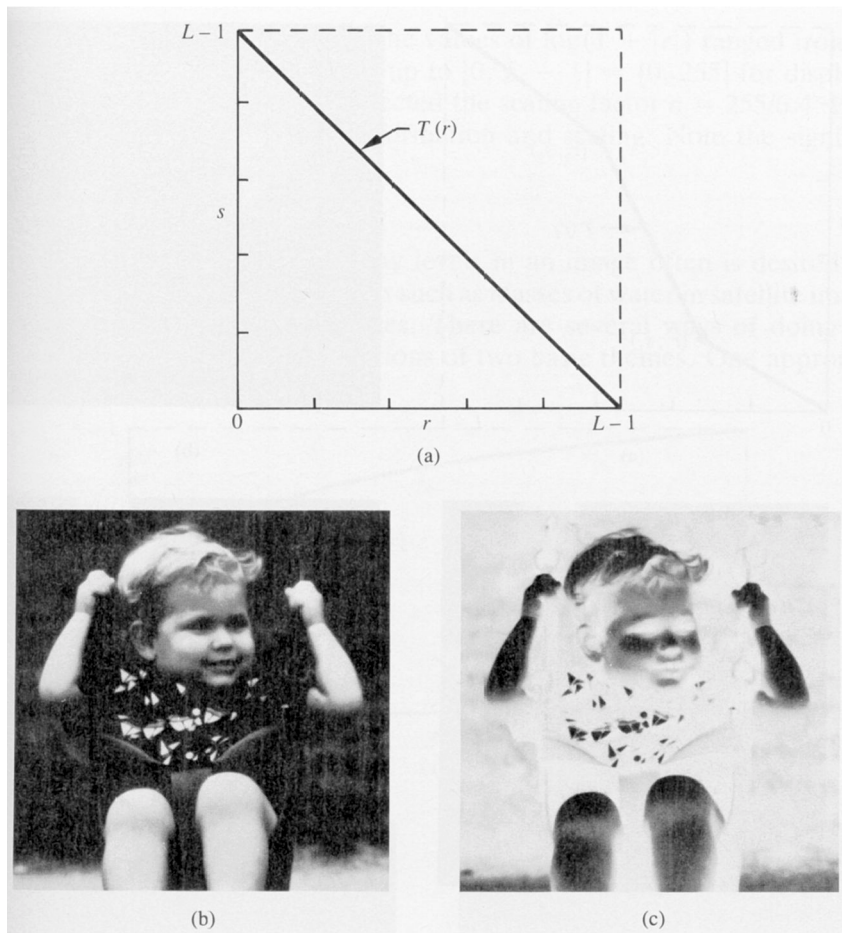
### Negatiivinen kuva

Negatiiviset kuvat ovat monessa tapauksessa käyttökelpoisia, kuten lääketieteellisissä kuvissa tai muodostettaessa normaaleista negatiivisista filmeistä positiivisia diakuvia. Digitaalisen kuvan negatiivi saadaan suoran yhtälöllä

$$s = T(r) = -r + L - 1 \quad (\text{kp.6})$$

jossa  $s$  on negatiivinen harmaataso,  $r$  on positiivinen harmaataso ja  $L$  on harmaatasojen lukumäärä. Ideana on kääntää valkoinen mustaksi niin, että negatiivikuvan intensiteetti





Kuva kp.4 Negatiivisen kuvan määrääminen. Muunnosfunktio (a), positiivinen kuva (b) ja negatiivinen kuva (c).

pienenee kun positiivikuvan intensiteetti suurenee. Muunnoskäyrän muoto on kuvassa kp.4 (a). Vastaavasti kuvissa kp.4 (b) ja (c) on esimerkki tämän yksinkertaisen muunnoksen käytöstä.

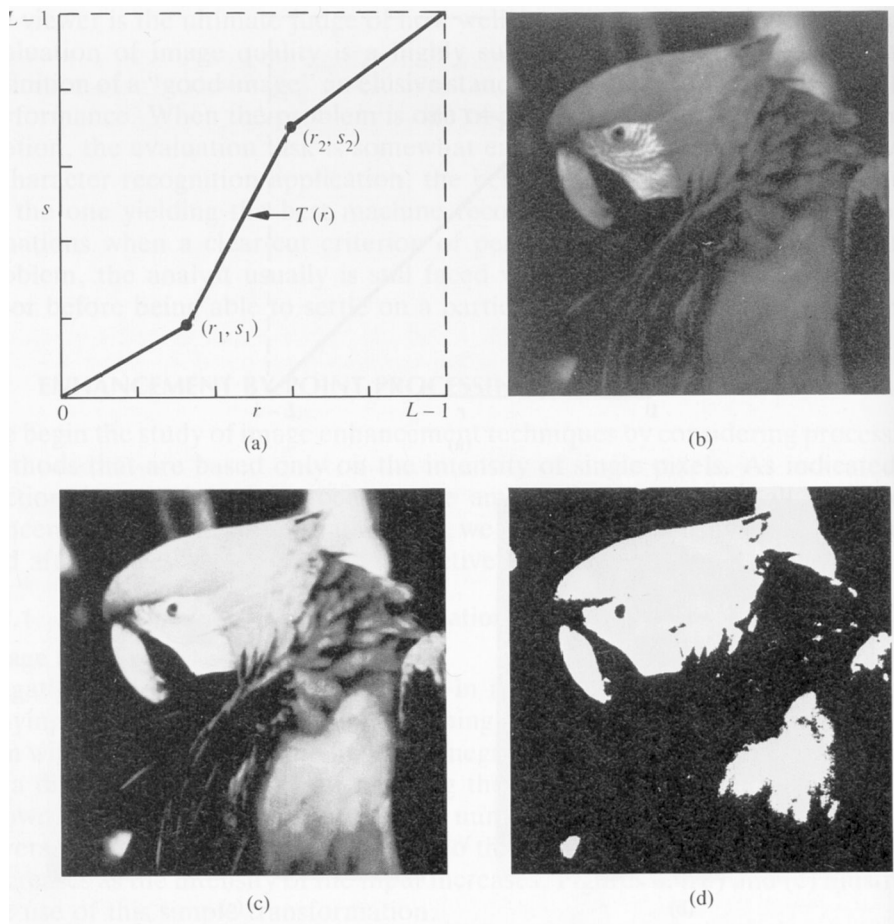
### Kontrastin laajentaminen

Alhaisen kontrastin kuva voi olla seurausta huonosta valaistuksesta, kuvasensorin huonosta dynamiikka-alueesta tai asetusvirheistä kuvattaessa. Kontrastin laajennuksen idea on lisätä prosessoitavan kuvan harmaatasojen dynamiikkaa. Kuvassa kp.5 (a) on tyypillinen kontrastin laajennusfunktio. Pisteitten  $(r_1, s_1)$  ja  $(r_2, s_2)$  kontrolloivat muunnosfunktion muotoa. Esimerkiksi, jos  $r_1 = s_1$  ja  $r_2 = s_2$ , muunnos on lineaarinen funktio, joka ei vaikuta kuvan harmaatasoihin. Jos  $r_1 = r_2$ ,  $s_1 = 0$  ja  $s_2 = L - 1$ , muunnoksesta tulee kynnystysfunktio, joka muodostaa binäärikuvan. Edellisten ääripäiden väliarvot  $(r_1, s_1)$  ja  $(r_2, s_2)$  tuottavat erilaisia laajennettuja harmaatasokuvia ja vaikuttaen siten kuvien kontrastiin. Yleisesti  $r_1 \leq r_2$  ja  $s_1 \leq s_2$  on oletettu, jotta funktio olisi yksiarvoinen ja monotonisesti kasvava. Tämä ehto säilyttää harmaatasojen järjestyksen estäen keinotekoisien intensiteettien syntymisen prosessoitavaan kuvaan. Kuvassa kp.5 on esimerkki kontrastin laajentamisesta.

### Dynamiikka-alueen kompressointi

Joskus prosessoidun kuvan dynamiikka-alue ylittää näyttölaitteen mahdollisuudet. Tässä tapauksessa vain kuvan kirkkaimmat osat ovat näkyvissä näytöllä. Samanlainen tilanne esiintyy joskus yritettäessä kuvata tällaista kohdetta filmille. Eräs klassinen esimerkki tästä





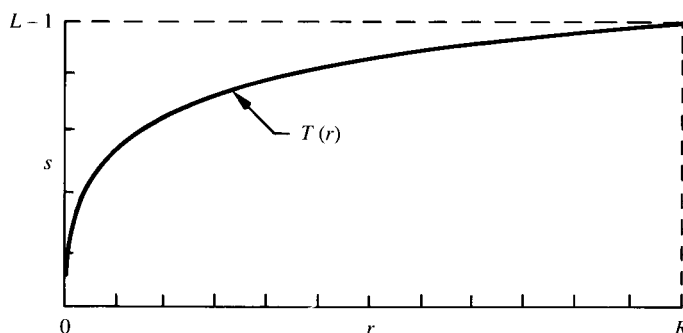
Kuva kp.5 Kontrastin laajentaminen. Kontrastin laajennusfunktio (a) pieni kontrastinen kuva (b) kontrastin laajennuksen tulos (c) ja tulos kynnystämisestä (d)

ongelmasta on kuvan Fourier-spektrin näyttäminen. Tehokas tapa kompressoida pikselien dynamiikka-aluetta on käyttää seuraavaa intensiteettimuunnosta

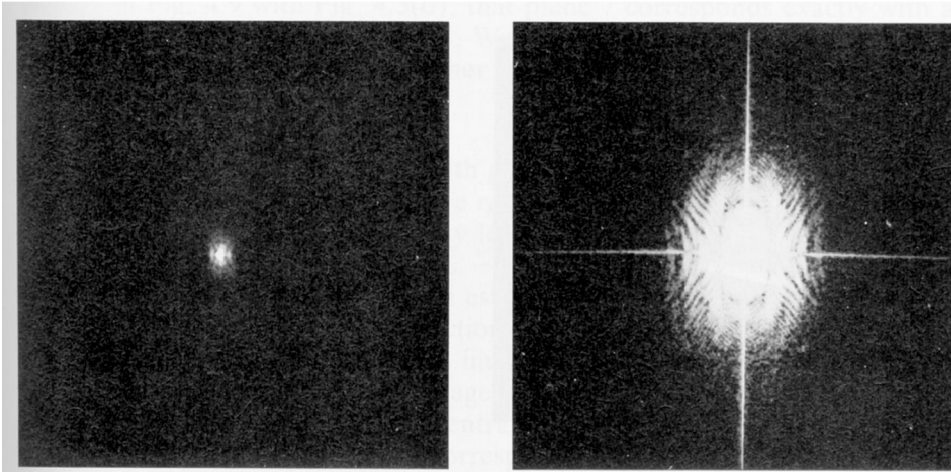
$$s = c \log(1 + |r|) \quad (\text{kp.7})$$

jossa  $c$  on skaalausvakio. Logaritmifunktio suorittaa tarvittavan kompression. Kuvassa kp.6 a on logaritmifunktion kuvaaja.

Kuvassa kp.6 b on Fourier-spektri ilman kompressiota vasemmalla että sama muunnos kompressoituna. Fourier-spektrin alkuperäinen dynamiikka  $[0, R] = [0, 2,5 \times 10^6]$ , joka on kvantisoitu lineaarisesti 8 bitillä. Kirkkaimmat tasot dominoivat kuvaa selvästi kuten odotettua, kun kysymys on näin laajasta dynamiikasta. Tässä tapauksessa logaritmifunktion



Kuva kp.6 a Kompressiossa käytetyn logaritmifunktion kuvaaja.

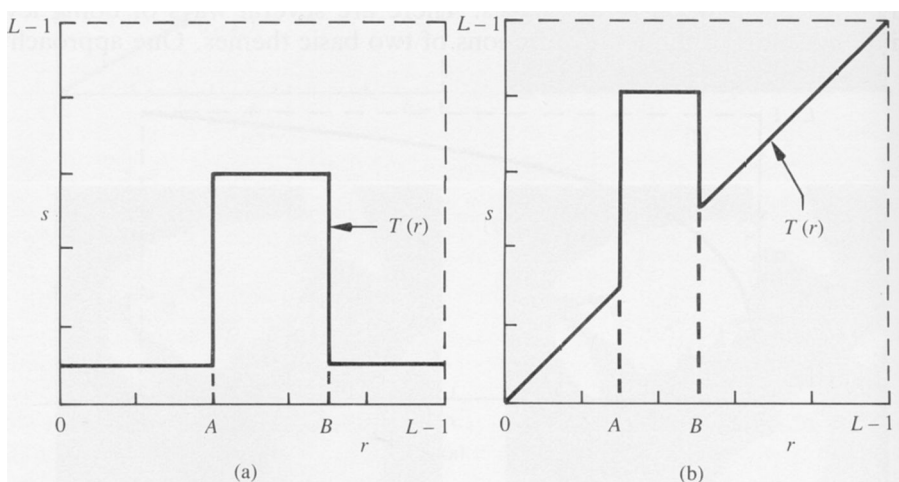


Kuva kp.6 b Vasemmalla on kuva, jonka dynamiikka on suuri. Oikealla sama kuva on kompressoitu, jolloin näkyvien yksityiskohtien määrä on kasvanut huomattavasti.

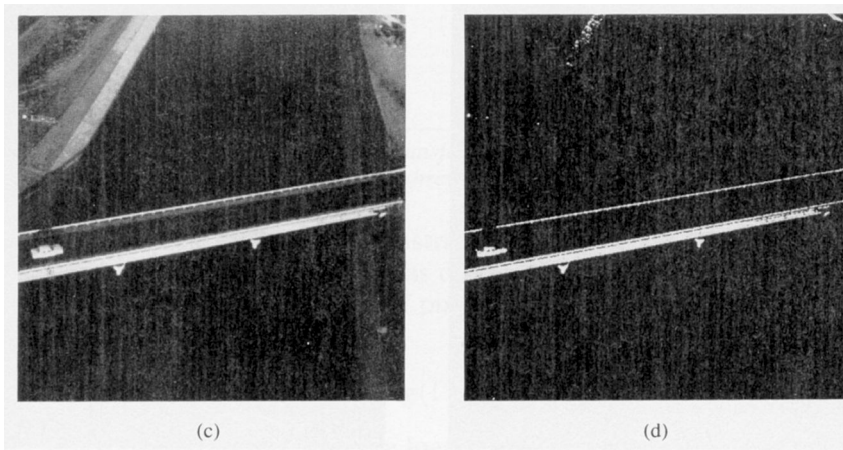
$\log(1+|r|)$  alue on 0:sta 6,4:ään. Tämä alue haluttiin skaalata välille  $[0, L-1] = [0, 255]$ , jotta se voidaan näyttää samassa 8-bittisessä järjestelmässä. Tämä saadaan aikaan valitsemalla skaalaustekijäksi  $c = 255/6,4$ . Kuvassa kp.6 b oikealla on kompressoitu kuva. Näkyvien yksityiskohtien määrä on kasvanut merkittävästi. Kompressointi menetelmä on sama, joka esiteltiin jo aikaisemmin Fourier-muunnoksen yhteydessä.

### Harmaatasojen viipalointi

Usein halutaan korostaa kuvassa joitakin harmaatasoja. Sovelluskohteita, joissa harmaatasojen viipalointia tarvitaan, ovat vesimassat sateliittikuvauksessa ja löydösten korostaminen röntgenkuvissa. Tasojen viipalointi voidaan tehdä useallakin tavalla, mutta ne voidaan yleensä palauttaa kahteen perusmenetelmään. Ensimmäisessä menetelmässä kiinnostavat harmaatasot näytetään suurilla intensiteeteillä ja muut tasot pienillä. Tämän menetelmän muunnosfunktio on kuvassa kp.7 a. Toisessa menetelmässä nostetaan kiinnostavien harmaatasojen intensiteettiä ja jätetään muut tasot ennalleen. Tämän menetelmän muunnosfunktio on kuvassa kp.7 b. Kuvassa kp.7 c on harmaatasokuva. Kuvassa kp.7 d edelliseen kuvaan on sovellettu ensiksi mainittua viipalointimenetelmää.



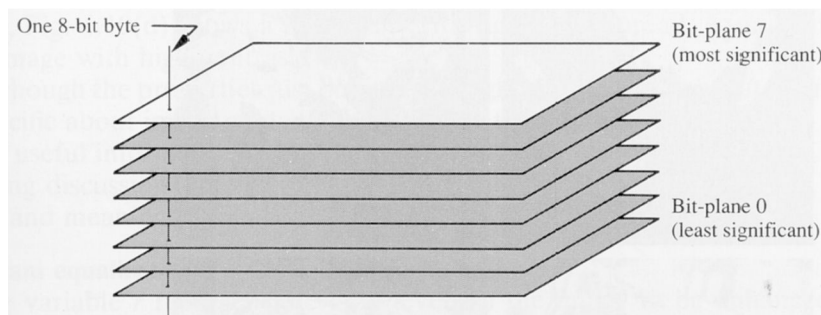
Kuva kp.7 a ja b Harmaatasoviipaloinnin muunnosfunktioita.



Kuva kp.7 c ja d Harmaatasosiivutuksen muunnosfunktioita

### Bittitason viipalointi

Intensiteettitasojen korostamisen sijasta joissakin tapauksissa on kiinnostavaa tutkia jonkin erityisen bitin merkitystä koko kuvan luettavuuden kannalta. Oletetaan, että kuvan jokainen pikseli on koodattu kahdeksalla bitillä. Kuvitellaan, että kuva on muodostunut kahdeksasta yksibittisestä tasosta. Tason nolla muodostaa vähiten merkitsevä bitti ja vastaavasti tason 7 eniten merkitsevä bitti. Kuvassa kp.8 on valotettu bittitasoideaa.



Kuva kp.8 8-bittisen kuvan bittitasoesitys

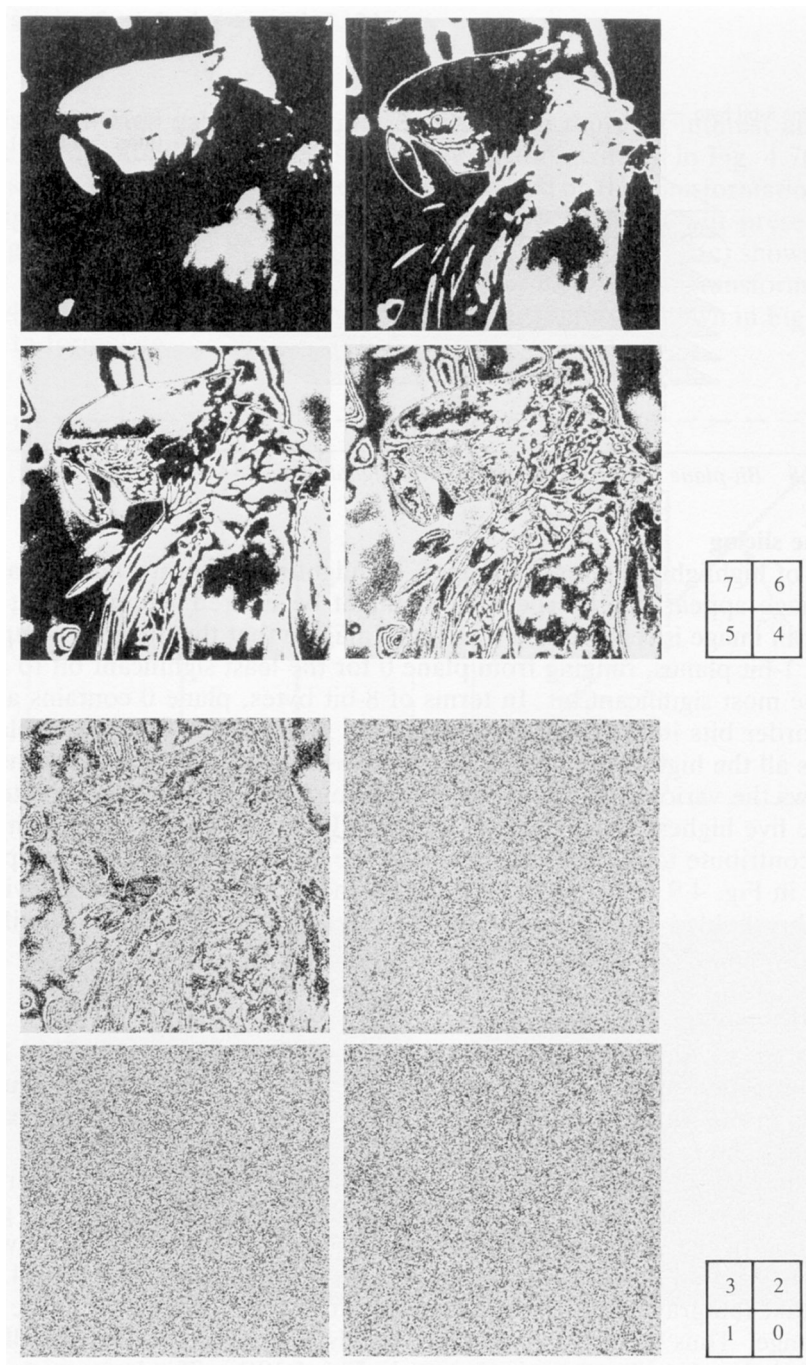
Kuvassa kp.9 on esimerkki, jossa 8-bittinen kuva on jaettu bittitasoihin. On huomattavaa, että vain viisi eniten merkitsevää bitti sisältää visuaalisesti merkittävää informaatiota. Muut tasot sisältävät hienovaraisempia yksityiskohtia. Kuva on sama kuin kuva kp.5. on huomattava, että kuvassa kp.9 taso 7 vastaa täsmälleen kuvan kp.5 d tulosta, joka vastaa kynnystä harmaatasolla 128.

### HISTOGRAMMIMUUNNOKSET

Digitaalisen kuvan, jonka harmaatasot ovat välillä  $[0, L-1]$ , histogrammi on diskreetti funktio  $p(r_k) = n_k/n$ . Tässä  $r_k$  on  $k$ :s harmaataso,  $n_k$  on niiden pikselien lukumäärä, joiden harmaataso on  $r_k$  ja  $n$  on kuvan pikselien koponaismäärä. Muuttuja  $k$  on välillä  $0, 1, 2, \dots, L-1$ . Jossakin mielessä  $p(r_k)$  antaa harmaatason  $r_k$  esiintymistodennäköisyyden estimaatin.

Funktion  $p(r_k)$  kuvaaja kaikilla  $k$ :n arvoilla antaa yleisnäkymän eri harmaatasojen keskinäisistä suhteista kuvassa. Kuvassa kp.10 on neljän erilaisen kuvan perustyyppin histogrammit. Kuvassa kp.10 (a) harmaatasot ovat keskittyneet harmaa-asteikon tummaan päähän. Histogrammi vastaa kuvaa, jonka yleissävy on tumma. Vastakkainen tilanne on





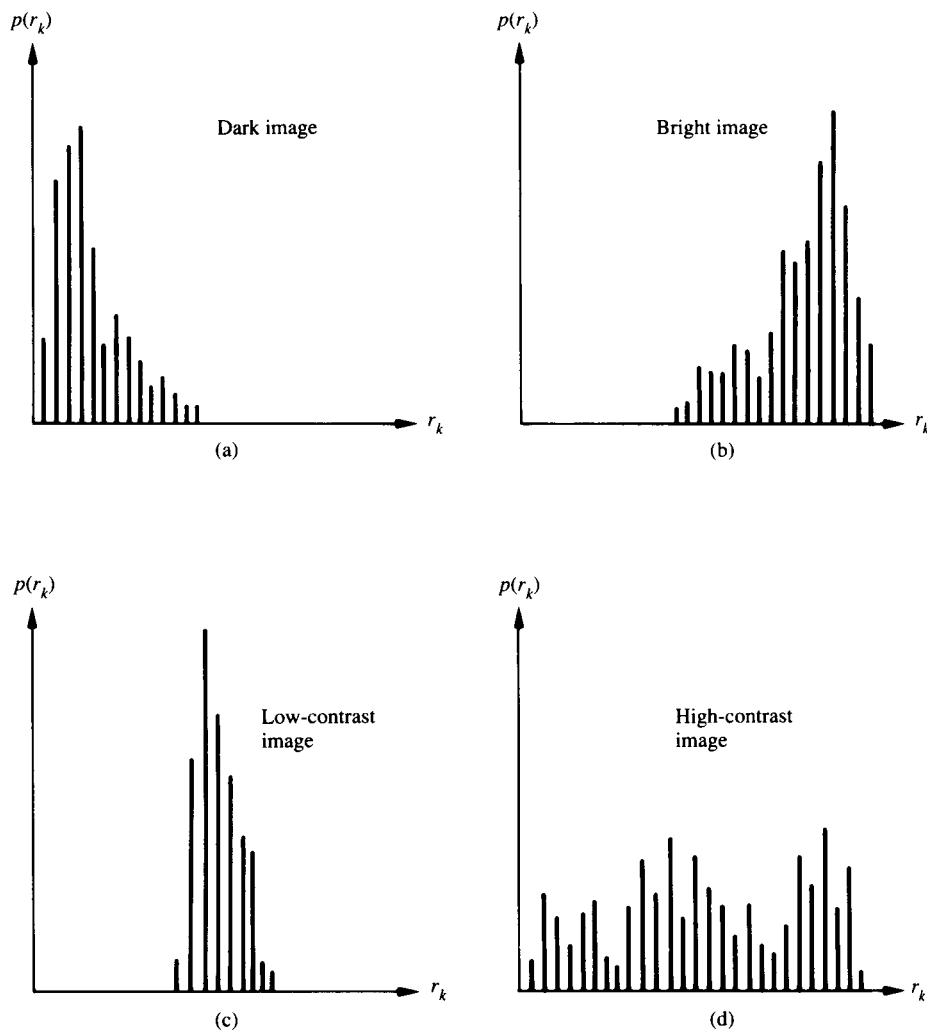
Kuva kp.9 Kuvan kp.5 (c) bittitasot. Sivulla olevat pienet neliöt viittaavat yksittäiseen tasoon. Taso 7 sisältää pikselin eniten merkitsevän bitin.

kuvassa kp.10 (b). Kuvassa kp.10 (c) histogrammilla on kapea muoto, joka kertoo pienestä dynamiikasta ja osoittaa pientä kontrastia. Kaikkien harmaatasojen sijaitessa harmaataasteikon keskiosassa, kuvan yleisilme on synkän harmaa. Viimeisenä kuvassa kp.10 (d) on laajan kontrastin omaavan kuvan histogrammi.

Vaikka histogrammi ei kerro mitään kuvan sisällöstä, se antaa kuitenkin tietoa mahdollisuuksista parantaa kontrastia. Seuraavissa kappaleissa kehitetään menetelmiä histogrammin muokkaamiseen.

### Histogrammin muokkaaminen

Oletetaan, että  $r$  edustaa muokattavan kuvan harmaatasoja. Alkujaan oletettiin, että pikselien



Kuva kp.10 Neljän eri perus kuvatyypin histogrammit

harmaatasojen arvot ovat jatkuvia ja ne on normalisoitu välille  $[0, 1]$ . Normalisoidulla asteikolla  $r = 0$  vastaa mustaa ja  $r = 1$  vastaavasti valkoista. Seuraavaksi määriteltiin diskreetit harmaatasoarvot, jotka ovat välillä  $[0, L - 1]$ .

Millä tahansa välillä  $[0, 1]$  oleva  $r$ :n arvo voidaan muuntaa uudeksi arvoksi  $s$  seuraavasti

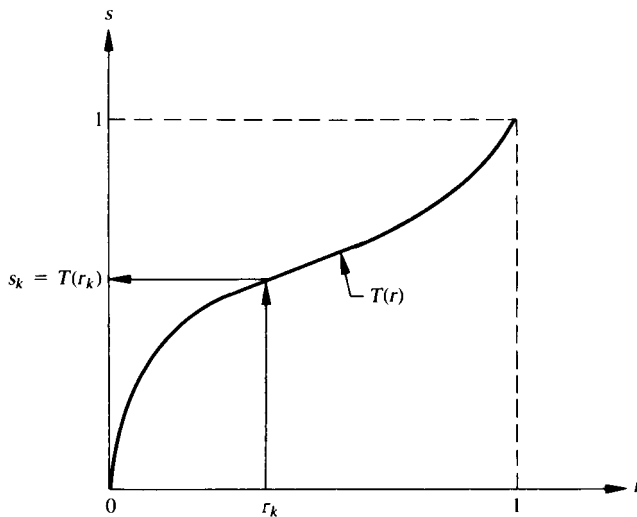
$$s = T(r) \quad (\text{kp.8})$$

Jolla saadaan jokaiselle pikselille uusi taso  $s$  aikaisemmasta arvosta  $r$ . Yhtälön (kp.8) oletetaan täyttävän seuraavat ehdot.

\*\*  $T(r)$  on yksiarvoinen ja se kasvaa monotonisesti välillä  $0 \leq r \leq 1$

\*\*  $0 \leq T(r) \leq 1$  kun  $0 \leq r \leq 1$

Ensimmäinen ehto varmistaa harmaatasojen järjestyksen säilymisen ja toinen ehto takaa, että kuvauksessa pikselien arvot pysyvät sallitulla alueella. Kuvassa kp.11 on muunnosfunktio, joka täyttää molemmat ehdot.



Kuva kp.11 Harmaataso muunnosfunktio

Käänteinen muunnos  $s$ :stä takaisin  $r$ :ään määritellään seuraavasti

$$r = T^{-1}(s) \quad (\text{kp.9})$$

jossa  $0 \leq s \leq 1$  ja  $T^{-1}(s)$ :n oletetaan täyttävän molemmat aikaisemmin esitetyt ehdot.

Kuvan harmaatasot voidaan ajatella myös satunnaismuuttujaksi, joka saa arvoja välillä  $[0, 1]$ . Jos tämä on jatkuva muuttuja, alkuperäisen ja muunnetun kuvan harmaatasoja voidaan luonnehtia tiheysfunktioilla  $p_r(r)$  ja  $p_s(s)$ .

Tilastomatematiikan mukaan, jos  $p_r(r)$  ja  $T(r)$  ovat tunnetut ja  $T^{-1}(s)$  täyttää aikaisemman ensimmäisen ehdon, muunnetun kuvan harmaatasojen tiheysfunktio on

$$p_s(s) = \left[ p_r(r) \frac{dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)} \quad (\text{kp.10})$$

Seuraava kuvan muokkaustekniikka perustuu harmaatasojen tiheysfunktion kontrollointiin muunnosfunktioilla  $T(r)$ . Muunnosfunktio on

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w) dw \quad (\text{kp.11})$$

jossa  $w$  on integraalia varten valittu muuttuja. Yhtälön (kp.11) oikea puoli on  $r$ :n kertymäfunktio. Aikaisemmin esitetyt ehdot täyttyvät tässä menetelmässä. Kertymäfunktio kasvaa monotonisesti 0:sta 1:een.

Yhtälöstä (kp.11) saadaan  $s$ :n derivaatta  $r$ :n suhteen

$$\frac{ds}{dr} = p_r(r) \quad (\text{kp.12})$$

sijoittamalla yhtälö (kp.12) yhtälöön (kp.10), saadaan

$$p_s(s) = \left[ p_r(r) \frac{1}{p_r(r)} \right]_{r=T^{-1}(s)} = [1]_{r=T^{-1}(s)} = 1 \quad (\text{kp.13})$$

jossa  $0 \leq s \leq 1$ . Tulos on tasajakauma määritellyllä muunnetun muuttujan  $s$  välillä. Tulos on riippumaton muunnosfunktioista, mikä on tärkeää, koska käänteisen muunnoksen  $T^{-1}(s)$  määrittäminen analyttisesti ei aina ole helppoa.

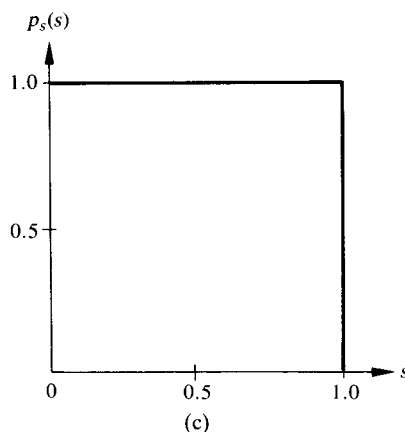
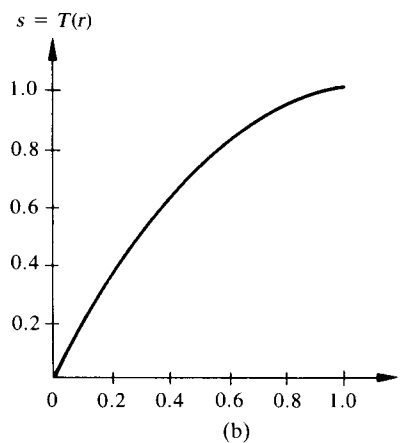
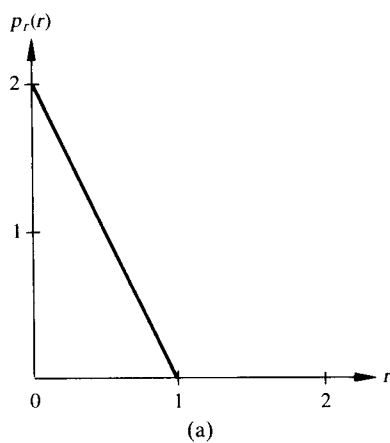
Edellä olevan kehittelyn mukaan käyttämällä muunnosfunktiona  $r$ :n kertymäfunktioita, saadaan kuva, jonka harmaatasot ovat tasajakautuneet. Kuvan muokkausmielessä näin saadun kuvan pikselien dynamiikka-alue on kasvanut. Tällä on huomattava vaikutus kuvan ulkoasuun.

### Esimerkki

Ennen siirtymistä diskreetteihin muuttujiin, tarkastellaan yhtälöiden (kp.10) ja (kp.11) valottamista esimerkin avulla. Oletetaan, että  $r$ :llä on kuvan kp.12 (a) mukainen tiheysfunktio. Tässä tapauksessa  $p_r(r)$  on

$$p_r(r) = \begin{cases} -2r + 2 & \text{kun } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Sijoittamalla tämä yhtälö yhtälöön (kp.11) saadaan muunnosfunktio



kp.12 Tasajakauma menetelmän valottaminen. Alkuperäinen tiheysfunktio (a), muunnosfunktio (b) ja tuloksena oleva tasajakautunut tiheysfunktio (c)

$$s = T(r) = \int_0^r (-2w + 2)dw$$

$$= -r^2 + 2r$$

Vaikka  $T(r)$  on kaikki mitä tarvitaan histogrammin muokkaamiseen, niin on kiinnostavaa osoittaa, että funktio  $p_s(s)$  on tasajakauma. Käytännössä tätä ei tarvita, sillä yhtälö (kp.13) on riippumaton käänteisestä muunnoksesta. Ratkaisemalla  $r$   $s$ :n funktiona, saadaan

$$r = T^{-1}(s) = 1 \pm \sqrt{1-s}$$

Koska  $r$ :n arvot ovat välillä  $[0, 1]$ , niin ainoa mahdollinen ratkaisu on

$$r = T^{-1}(s) = 1 - \sqrt{1-s}$$

$s$ :n todennäköisyys tiheysfunktio lasketaan yhtälön (kp.10) mukaan, joten

$$p_s(s) = \left[ p_r(r) \frac{dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)} = \left[ (-2r + 2) \frac{dr}{ds} \right]_{r=T^{-1}(s)}$$

$$= \left[ 2\sqrt{1-s} \frac{d}{ds} (1 - \sqrt{1-s}) \right]$$

$$= 1 \quad 0 \leq s \leq 1$$

joka on tasajakauma halutulla alueella. Kuvassa kp.12 (b) on muunnosfunktio  $T(r)$  ja kuvassa kp.12 (c) on tiheysfunktio  $p_s(s)$ .

Jotta edellä johdettu menetelmä olisi käyttökelpoinen digitaalisessa kuvankäsittelyssä, se on muotoiltava diskreettiin muotoon. Diskreetin harmaatason todennäköisyys on

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad (\text{pk.14})$$

jossa  $0 \leq r_k \leq 1$  ja  $k = 0, 1, \dots, L-1$ .  $L$  on harmaatasojen määrä,  $p_r(r_k)$   $k$ :nnen harmaatason todennäköisyys,  $n_k$  on  $k$ :nnen harmaatason esiintymisten määrä ja  $n$  on kuvan pikselien määrä. Kuvaus  $p_r(r_k)$   $r_k$ :n funktiona on histogrammi. Tekniikkaa, jolla epätasainen harmaatasojen jakautuma linearisoidaan, sanotaan histogrammin muokkaamiseksi tai histogrammin linearisoimiseksi.

Diskreetti muoto yhtälöstä (pk.11) on

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$$

$$= \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \quad (\text{pk.15})$$



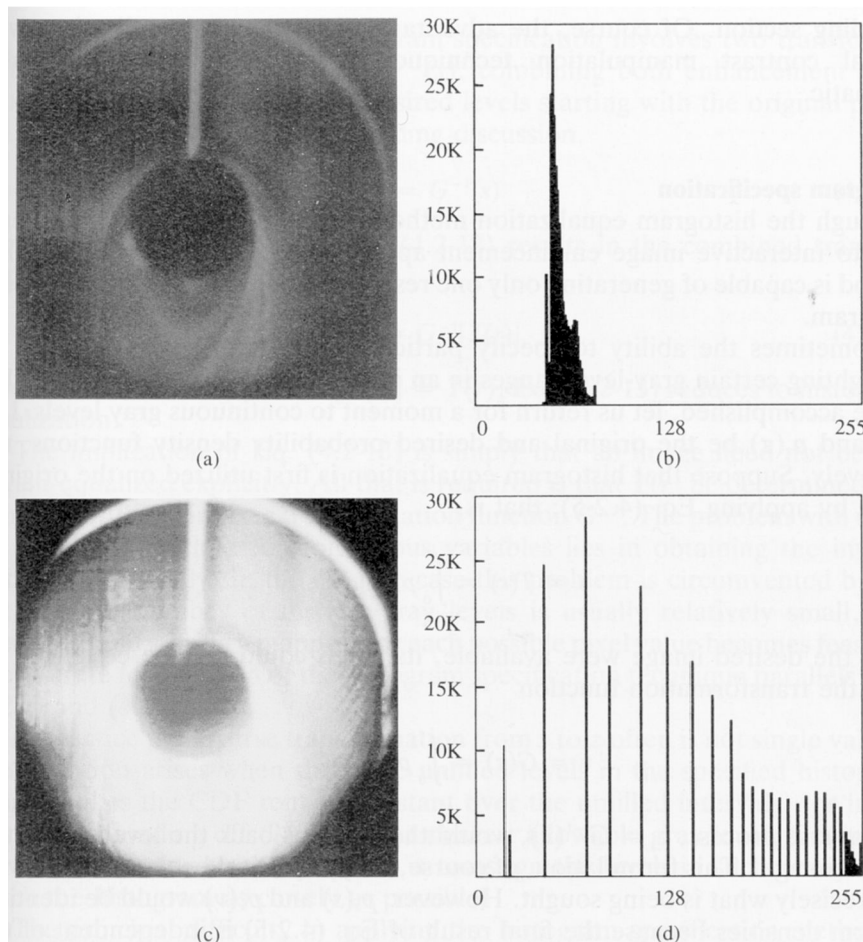
jossa  $0 \leq r_k \leq 1$  ja  $k = 0, 1, \dots, L - 1$ . Käänteinen muunnos määritellään

$$r_k = T^{-1}(s_k) \quad (\text{pk.16})$$

jossa  $0 \leq s_k \leq 1$ . Sekä  $T(r_k)$ :n ja  $T^{-1}(s_k)$ :n oletetaan täyttävän aikaisemmin määritellyt ehdot. Muunnosfunktio  $T(r_k)$  voidaan laskea suoraan käyttäen yhtälöä (pk.16). Vaikka käänteistä funktiota  $T^{-1}(s_k)$  ei käytetä histogrammin linearisoinnissa, se näyttelee keskeistä roolia seuraavassa kappaleessa kuvattavassa menetelmässä.

### Esimerkki

Histogrammin tasaamisen käyttökelpoisuuden valottamiseksi tarkastellaan kuvaa kp.13 (a). Siinä on  $512 \times 512$  kuva, joka on koodattu 8 bitillä. Kuva on tumma ja sen dynamiikka on hyvin huono. Perustuen aikaisempaan keskusteluun, kuvan histogrammi on kapea ja sen painopiste on tummassa päässä harmaatasoja. Kuvassa kp.13 (b) on edellisen kuvan histogrammi. Vaaka-akselilla on harmaataso-asteikko ja pystyakselilla on pikselien määrä todennäköisyyden asemesta. Esitystapa on käytännössä tavallinen, koska se on luonnollisempi ja pikselit on helppo laskea. Pystyakselin muuttaminen todennäköisyys-akseliksi käy helposti jakamalla määräasteikko kokonaismäärällä, tässä tapauksessa  $512^2$ . Vaaka-akseli voidaan normalisoida välille  $[0, 1]$  jakamalla harmaatasot 255:llä. Miksi näin menetellään johtuu siitä, että kysymyksessä on useimmiten kuvan tulkinnasta ja silloin ei histogrammin akselien merkinnöillä ole merkitystä.



Kuva kp.13 Alkuperäinen kuva (a) ja sen histogrammi (b). Kuva korjattuna histogrammin tasauksella (c) ja korjatun kuvan histogrammi (d)

Kuvassa kp.13 (c) on tulos histogrammin tasauksen jälkeen. Parannus alkuperäiseen kuvaan on ilmeinen. Kuvassa kp.13 (d) on korjatun kuvan histogrammi. On huomattava, että histogrammi ei ole tasainen. Tuloksen ei pitäisi olla yllätys, sillä mikään aikaisemmin jatkuvassa tapauksessa ei väittänyt, että tuloksen pitäisi olla tasainen. Muutetun kuvan harmaatasot ovat levinneet laajemmalle alueelle ja maksimitaso saavuttaa aina valkoisen. Tämä prosessi kasvattaa harmaatasojen dynamiikka-aluetta ja sitä kautta kuvan kontrastia.

Kuvassa, jossa on kapea histogrammi ja suhteellisen vähän harmaatasoja, dynamiikka-alueen kasvattamisella on haitallinen vaikutus kuvan rakeisuuteen ja läikittymiseen. Molemmat ilmiöt on havaittavissa kuvassa kp.13 (c). Myös huonosta digitoinnista johtuvat vaakaraidat ovat tulleet näkyvämmiksi. Kuitenkin kokonaisuutena histogrammin tasaaminen paransi merkittävästi tämän kuvan visuaalista ilmettä. Samantapainen tulos olisi saavutettu aikaisemmin esitellyllä kontrastin laajennuksella. Histogrammin tasauksen etu verrattuna manuaaliseen prosessointiin on automaattisuus.

### Histogrammin määrittely

Vaikka histogrammin tasausmenetelmä on erittäin käyttökelpoinen, se ei ole vuorovaikutteinen kuvanparannusmenetelmä. Sen haittana on, että se tuottaa aina vain yhden mahdollisen lopputuloksen, joka on tasajakautuneen histogrammin likiarvo.

Joskus on toivottavaa voida spesifioida jokin erityinen histogrammin muoto, joka korostaa tiettyjä haluttuja harmaatasoja. Menetelmän johtamiseksi palataan jatkuviin harmaatasoihin. Olkoon  $p_r(r)$  alkuperäinen ja  $p_z(z)$  haluttu todennäköisyys tiheysfunktio. Suoritetaan aluksi histogrammin tasaus alkuperäiseen kuvaan, jolloin

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw \quad (\text{kp.17})$$

Jos haluttu kuva on saatavilla, myös sen tasot tasataan muunnosfunktiolla

$$v = G(z) = \int_0^r p_z(w)dw \quad (\text{kp.18})$$

Käänteinen muunnos  $G^{-1}$  palauttaa takaisin halutun kuvan tasot  $z$ . Tämä muunnos on hypoteettinen, sillä kuva on juuri se haluttu. Kuitenkin  $p_s(s)$  ja  $p_v(v)$  omaavat kumpikin samanlaisen tiheysfunktion, koska yhtälön (kp.11) mukaan tulos on riippumaton integraalin sisällä olevasta tiheysfunktioista. Nyt sensijaan, että käytettäisiin  $v$ :tä käänteiseen muunnokseen, käytetään alkuperäisen kuvan tasattuja arvoja  $s$ . Tällöin histogrammilla, joka on saatu muunnoksesta  $z = G^{-1}(s)$ , on haluttu tiheysfunktio. Olettaen  $G^{-1}(s)$  yksiarvoiseksi, prosessi on seuraavan yhteenvedon mukainen.

1. Alkuperäisen kuvan histogrammi tasataan käyttäen yhtälöä (kp.11)
2. Määritellään haluttu tiheysfunktio ja määrätään muunnosfunktio  $G(z)$  käyttäen yhtälöä (kp.18)
3. Sovelletaan kohdassa 1. laskettuihin tasattuihin tasoihin  $s$  muunnosfunktiota  $z = G^{-1}(s)$ .

Tämä menetelmä tuottaa alkuperäisestä prosessoidun kuvan, jolla on haluttu spesifioitu harmaatasojen tiheysfunktio  $p_z(z)$ .

Histogrammin määrittely menetelmä sisältää kaksi perättäistä muunnosta. Siinä muunnosta  $T(r)$  seuraa muunnos  $G^{-1}(s)$ . Nämä voidaan helposti yhdistää yhdeksi muunnosyhtälöksi, joka tuottaa halutut pikselien arvot. Aikaisemman perusteella

$$z = G^{-1}(s) \quad (\text{kp.19})$$

Sijoittamalla yhtälö (kp.11) yhtälöön (kp.19), saadaan yhdistetty yhtälö

$$z = G^{-1}[T(r)] \quad (\text{kp.20})$$

joka kuvaa  $r$ :n  $z$ :aan. Kun  $G^{-1}[T(r)] = T(r)$ , yhtälö (kp.20) palautuu histogrammin tasaukseksi.

Johtopäätös (kp.20) on, että kuvan histogrammia ei tarvitse tasata. Riittää, että määritellään  $T(r)$ , joka yhdistetään käänteiseen muunnosfunktioon  $G^{-1}$ . Edelläkuvatussa menetelmässä ongelmana on tarve määrätä käänteinen funktio analyttisesti. Diskreetissä tapauksessa tämä ongelma on kierretty. Tosiasia on, että kiinnostavien harmaatasojen määrä on yleensä aika pieni jolloin näiden pikselien tasojen kuvaus on helppo tehdä erikseen kullekin. Diskreetissä menetelmässä käytetään yhtälöitä (kp.15) ja (kp.16).

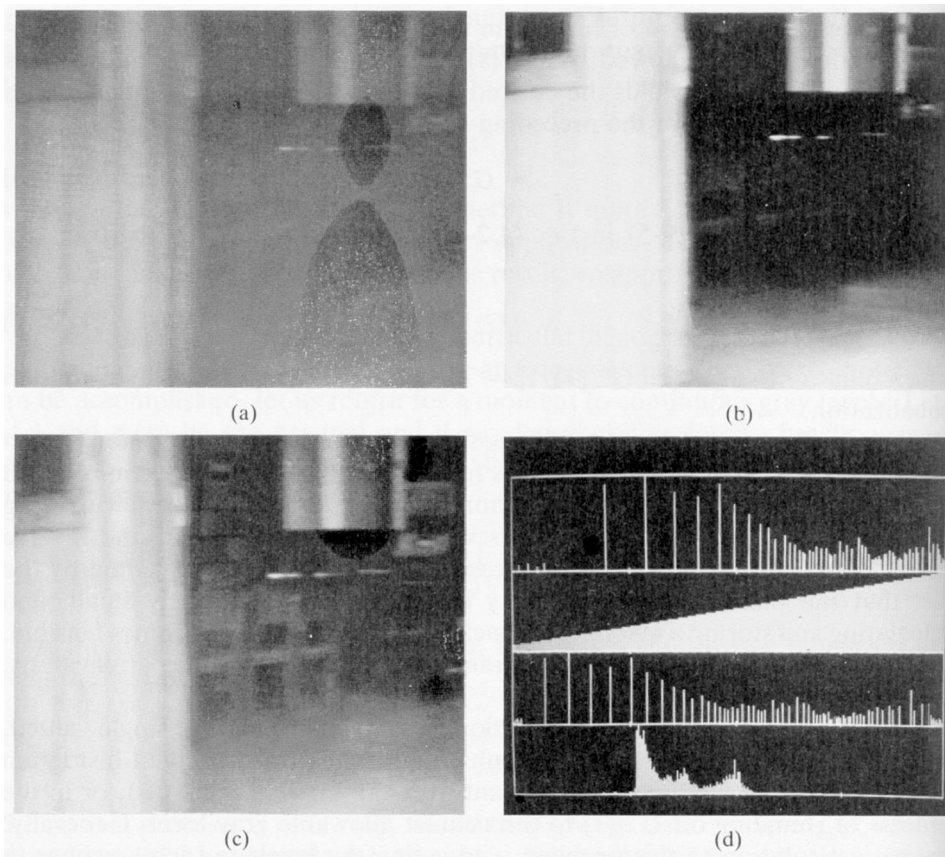
Käytännössä käänteinen muunnos  $s$ :stä  $z$ :aan ei useinkaan ole yksikäsitteinen. Tämä tilanne ilmenee, kun histogrammissa on käyttämättömiä tasoja tai kun  $G^{-1}(s)$  pyöristetään lähimpään sallittuun arvoon. Yleisesti helpoin ratkaisu välttää monikäsitteisyys, on määrätä tasot niin, että ne sopivat histogrammiin niin hyvin kuin mahdollista.

Päävaikeus histogrammin määrittelymenetelmässä on tarkoituksenmukaisen histogrammin rakentaminen. Tähän ongelmaan on olemassa kaksi erilaista ratkaisua. Ensimmäisessä menetelmässä määritellään jokin tiheysfunktio, esimerkiksi normaalijakauma, josta muodostetaan histogrammi digitoimalla funktio. Toisessa menetelmässä histogrammin muoto määritellään sähköisillä graafisilla työkaluilla, jonka jälkeen tästä lasketaan muunnosfunktio.

### **Esimerkki**

Tarkastellaan kuvaa kp.14 (a), jossa on näkymä ovelta puolitummaan huoneeseen. Kuvassa kp.14 (b) on tulos histogrammin tasauksen jälkeen ja kuvassa kp.14.(c) on kuvaa korjattu interaktiivisella histogrammin määrittelytekniikalla. Viimeisessä kuvassa kp.14 (d) on histogrammit. Ylinä on alkuperäisen kuvan histogrammi, seuraavana on tasattu histogrammi, seuraavana on määriteltu- ja alimpana tuloshistogrammi.

On huomattava, että histogrammin taseus tuottaa kuvan, jonka kontrasti on suuri. Sensijaan histogrammin määrittelyllä on saavutettu selvästi tasapainoisempi tulos. Tulos voidaan yleistää. Histogrammin määrittely tuottaa yleensä selvästi parempia tuloksia. Tämä johtuu menetelmän joustavuudesta.



Kuva kp.14 Histogrammin määrittely-menetelmän valottaminen Alkuperäinen kuva (a), histogrammin tasaus (b), histogrammin määrittely (c) ja kuvien histogrammit

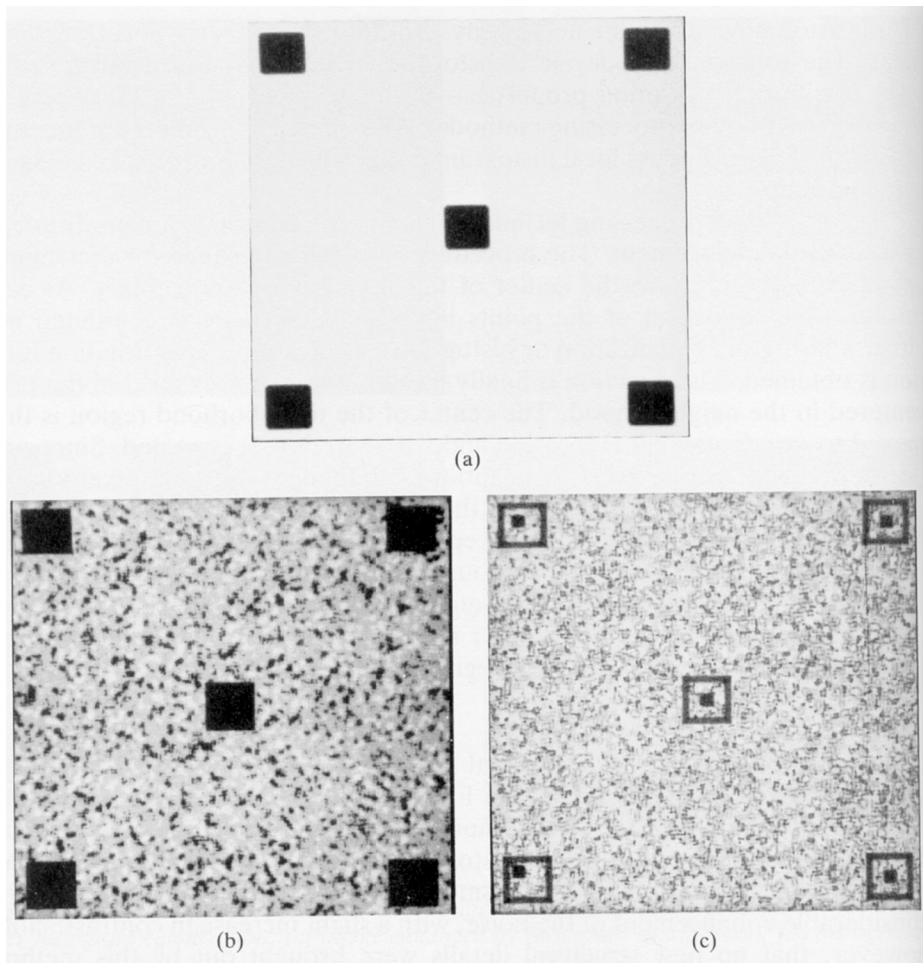
### Paikallinen muokkaaminen

Edellä käsitellyt kaksi menetelmää ovat globaaleja siinä mielessä, että muunnosfunktiota on sovellettu koko kuvaan. Vaikka tämä globaali menetelmä on sopiva kuvan yleisilmeen muokkaamiseen, esiintyy kuitenkin usein tarve käsitellä joitakin yksityiskohtaa pienellä alalla kuvaa. Koko kuvan menetelmiä käytettäessä pienellä yksityiskohdalla ei välttämättä ole vaikutusta määriteltäessä muunnosfunktioita ja siten ei myöskään saavuteta haluttua paikallista tulosta. Ratkaisu tähän ongelmaan on perustaa muunnosfunktio harmaatasojen jakaumaan tai johonkin muuhun ominaisuuteen jokaisen pikselin naapurustossa. Näitä menetelmiä käsitellään yleisemmin myöhemmin. Tässä jaksossa tarkastellaan näitä menetelmiä histogrammimuunnosten pohjalta.

Aikaisemmin käsitellyt histogrammin muokkausmenetelmät on helppo soveltaa paikalliseen muokkaamiseen. Menetelmänä on määritellä neliö tai suorakaide ympäristö ja siirtää tämän alueen keskipistettä pikseli pikseliltä. Jokaisessa asemassa lasketaan naapuruston pisteiden histogrammi. Tämän jälkeen määritellään histogrammin tasausfunktio tai histogrammin määrittelyfunktio. Viimeisenä sovelletaan muunnosfunktiota kuvaamaan naapuruston keskipisteen pikselin harmaataso. Seuraavaksi siirretään määrittelyalueen keskipiste seuraavaan pikseliin ja algoritmi toistetaan. Koska vain yksi uusi rivi tai sarake muuttuu pikseli pikseliltä muunnoksen aikana, edellisessä paikassa määritellyn histogrammin päivittäminen jokaisella askeleella uudella datalla on mahdollista. Tällä menetelmällä on etunsa verrattuna siihen, että histogrammi laskettaisiin joka kerta koko alueelta uudestaan.

Toinen lähestymistapa ongelmaan on käyttää limittymättömiä alueita. Tämä menetelmä tuottaa kuitenkin haitallisen shakkilauta ilmiön.





Kuva kp.15 Alkuperäinen kuva (a) tulos globaalista hidstogrammin tasauksesta (b) tulos histogrammin tasauksesta käytettäessä  $7 \times 7$  naapurustoa jokaiseen pikseliin.

### Esimerkki

Kuva kp.15 valottaa paikallista histogrammin tasausta, jossa naapurustoa siirretään pikseli pikseliltä. Kuvassa kp.15 (a) on tilanne, jossa kuva on muokkautunut kohinaa pinennettäessä. Kuvassa kp.15 (b) on globaalin histogrammin tasauksella saatu tulos. Kuten usein on tilanne käytettäessä globaalia histogrammin tasausta pehmeisiin kohinaisiin alueisiin, kohinan osuus on kasvanut merkittävästi ja kontrasti jonkin verran. Kuitenkaan uusia rakenteellisia yksityiskohtia ei ole tullut esille. Paikallinen histogrammin taseus on tuonut esiin tummien neliöiden sisällä olevat pienet tummat neliöt. Paikallisessa histogrammin tasauksessa on käytetty  $7 \times 7$  aluetta. Pienet neliöt olivat liian pieniä ja liian lähellä muita vastaavia tasoja vaikuttaakseen globaaliin histogrammin tasaukseen. On huomattava myös kohinan hienompi rakenne.

Histogrammin sijasta paikallisessa kuvan parantamisessa voidaan käyttää muita paikallisia pikselin intensiteetin ominaisuuksia. Intensiteetin keskiarvoa ja varianssia käytetään paljon tähän tarkoitukseen, sillä ne kuvaavat hyvin kuvan näkyvää luonnetta. Keskiarvo on mitta kuvan keskimääräisestä kirkkaudesta ja varianssi kontrastista.

Tyypillinen keskiarvoon ja varianssiin perustuva paikallinen menetelmä kuvaa alkuperäisen kuvan  $f(x, y)$  uudeksi kuvaksi  $g(x, y)$  suorittamalla jokaiselle pikselille  $(x, y)$  muunnoksen

$$g(x, y) = A(x, y) \cdot [f(x, y) - m(x, y)] + m(x, y) \quad (\text{kp.21})$$

jossa

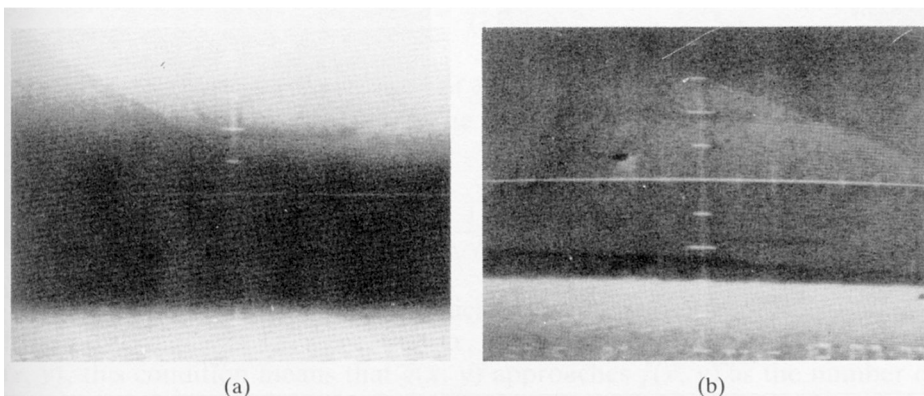
$$A(x, y) = k \frac{M}{\sigma(x, y)} \quad (\text{kp.22})$$

jossa  $0 < k < 1$ . Näissä yhtälöissä  $m(x, y)$  on harmaatasojen keskiarvo ja  $\sigma(x, y)$  varianssi laskettuna naapurustossa, jonka keskipiste on  $(x, y)$ .  $M$  on kuvan  $f(x, y)$  globaali keskiarvo.

Muuttujien  $A$ ,  $m$  ja  $\sigma$  arvot riippuvat pikselin  $(x, y)$  etukäteen määritellystä naapurustosta. Paikallinen vahvistustekijä  $A(x, y)$  verrattuna kuvaan  $f(x, y)$  ja paikallinen keskiarvo vahvistavat paikallisia vaihteluita. Koska  $A(x, y)$  riippuu käänteisesti intensiteetin keskihajonnasta niin alueisiin, joiden kontrasti on pieni, käytetään suurempaa vahvistusta. Yhtälössä (kp.21) keskiarvo palautetaan kuvaan takaisin, jotta paikallisen alueen keskimääräinen intensiteetti säilyisi. Käytännössä palauttamalla vain murto-osa paikallisesta keskiarvosta ja rajoittamalla funktion  $A(x, y)$  vaihtelut välille  $(A_{min}, A_{max})$  on usein toivottavaa tasapainottamaan suuret intensiteetin vaihtelut rajoitetulla alueella

### Esimerkki

Esimerkkinä yhtälöiden (kp.21) ja (kp.22) mahdollisuuksista on kuva kp.16, jossa on käytetty  $15 \times 15$  paikallista aluetta. On huomatta yksityiskohtien lisääntyminen kahden erilaisen harmaatasoalueen rajalla ja yksityiskohtien lisääntyminen kullakin alueella.



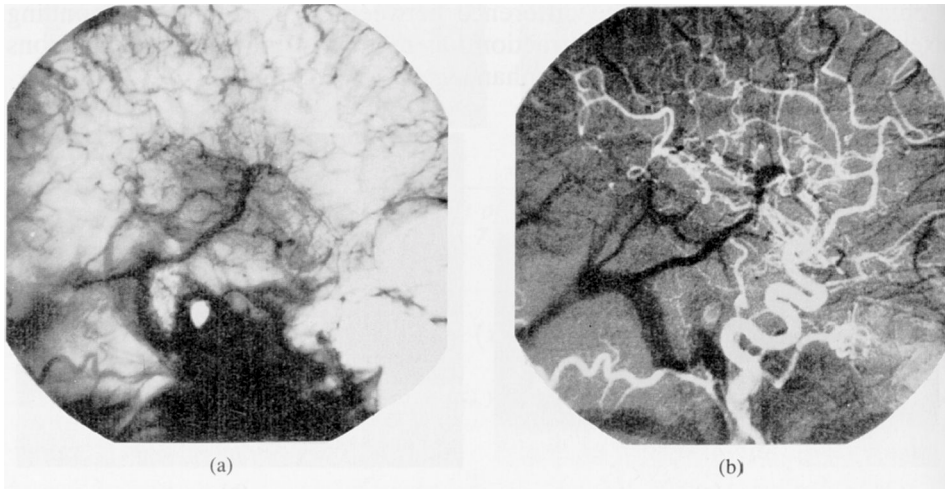
Kuva kp.16 Kuva ennen ja jälkeen paikallisen tasauksen

## KUVAN VÄHENTÄMINEN

Kahden kuvan  $f(x, y)$  ja  $h(x, y)$  erotus  $g(x, y)$ , jonka matemaattinen muoto on

$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y) \quad (\text{kp.23})$$

määrätään laskemalla vastinpikselien erotus kuvista  $f$  ja  $h$ . Kuvan vähentämisellä on joukko tärkeitä sovellutuksia segmentoinnissa ja kuvien parantamisessa. Klassinen esimerkki yhtälön (kp.23) käytöstä kuvien parantamiseen tulee lääketieteellinen kuvaustekniikka, joka kulkee nimellä "mask mode radiography". Tässä tapauksessa  $h(x, y)$ , maski, on röntgenkuva, joka on saatu potilaasta ja vahvistettu. Menetelmässä käytetään TV-kameraa perinteellisen filmin asemesta. Kuva  $f(x, y)$  on yksi näyte useista samanlaisista kuvista, jotka on otettu samasta kohteesta kuin kuva  $h(x, y)$  varjoaineen verenkiertoon ruiskuttamisen jälkeen. Vähentämällä maski  $h(x, y)$  kuvasta  $f(x, y)$  saadaan erokuva, jossa on näkyvissä vain muutokset. Erot näkyvät korostettuina lisäten näkyvien yksityiskohtien määrää. Koska kuvat otettiin TV-kameralla, voidaan varjoaineen liikkeitä seurata sen kulkiessa suoniston läpi.



Kuva kp.17  
Kuvan parantaminen vähennys-  
tekniikalla.

### Esimerkki

Kuvassa kp.17 (a) on röntgenkuva potilaan päästä ennen varjoaineen ruiskuttamista. Kamera on asennettu potilaan pään yläpuolelle ja suunnattu alaspäin. Referenssipisteen on noin kolmannes kuvan alareunasta oleva kirkas alue, joka aiheutuu selkäytimestä. Kuvassa kp.17 (b) on erokuva edellisen kuvan, maskin, ja kuvan, joka otettiin jonkin aikaa varjoaineen ruiskuttamisen jälkeen, välillä. Kirkas varjoaineen täyttämä pääsuoni on saatu hyvin esille. Suonet ovat kirkkaita, koska ne eivät ole vähentäneet laskettaessa erotusta. Sensijaan muuttumaton tausta on tumma johtuen niiden muuttumattomuudesta kahden kuvan välillä. Myös kirkas selkäytimestä johtuva alue on nyt tumma.

### KUVAN KESKIARVOTTAMINEN

Oletetaan kohinaaine kuva  $g(x, y)$ , joka on muodostettu lisäämällä alkuperäiseen kuvaan  $f(x, y)$  kohina  $\eta(x, y)$ , jolloin

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y) \quad (\text{kp.24})$$

Kohinan oletetaan olevan korreloimaton kuvan  $f(x, y)$  kanssa ja sen keskiarvo on nolla. Seuraavassa menetelmässä kohinan osuutta vähennetään laskemalla yhteen joukko kohinaisia kuvia.

Jos kohina täyttää edellä olevat ehdot, on yksinkertainen tehtävä osoittaa, että jos kuva  $\bar{g}(x, y)$  on muodostettu keskiarvottamalla  $M$  kohinaista kuvaa

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_i(x, y) \quad (\text{kp.25})$$

jolloin seuraa

$$E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y) \quad (\text{kp.26})$$

ja

$$\sigma_{\bar{g}(x, y)}^2 = \frac{1}{M} \sigma_{\eta(x, y)}^2 \quad (\text{kp.27})$$

jossa  $E\{\bar{g}(x, y)\}$  on  $\bar{g}$ :n odotusarvo,  $\sigma_{\bar{g}(x, y)}^2$  on  $\bar{g}$ :n varianssi ja  $\sigma_{\eta(x, y)}^2$  on  $\eta$ :n varianssi. Minkä tahansa pisteen keskihajonta kuvassa on

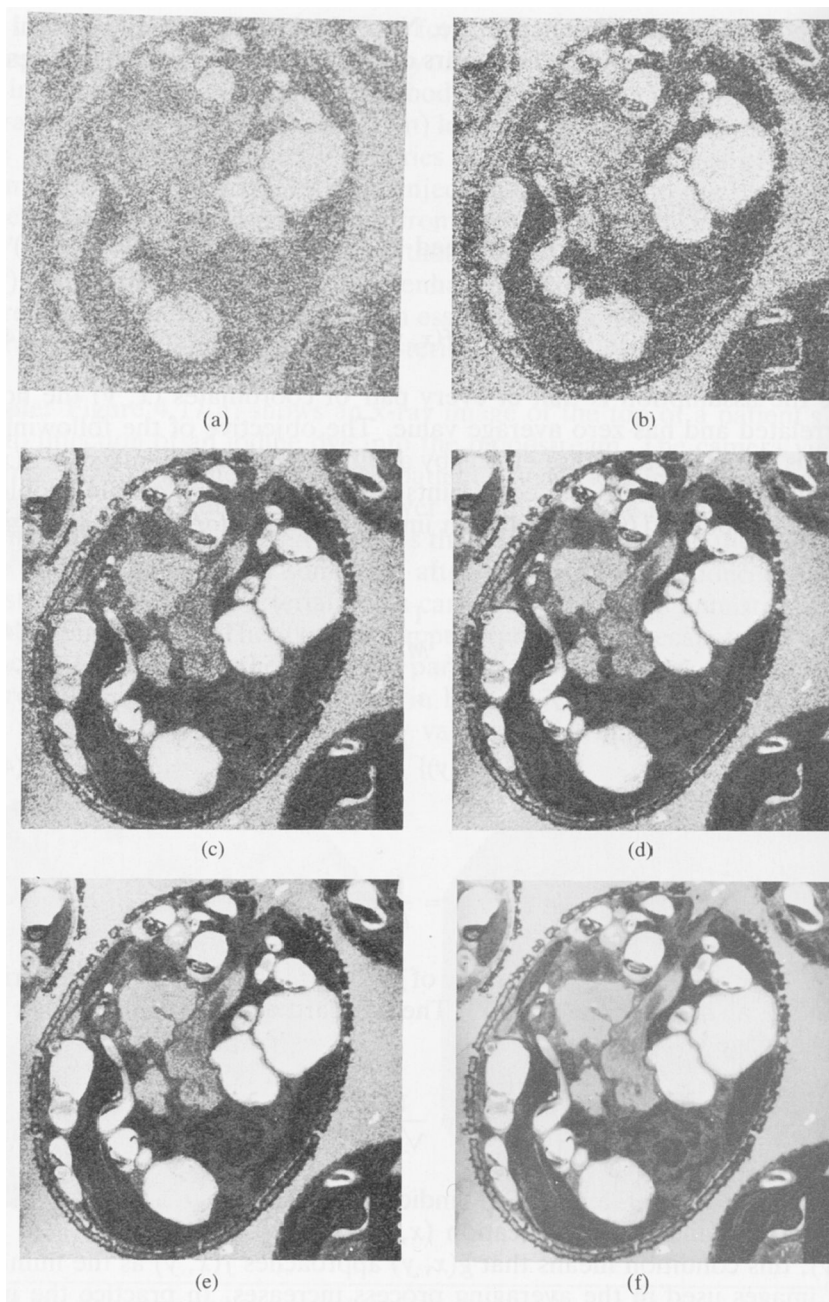


$$\sigma_{\bar{g}(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sigma_{\eta(x,y)} \quad (\text{kp.28})$$

Yhtälöt (kp.27) ja (kp.28) osoittava, että  $M$ :n kasvaessa jokaisen pikselin  $(x, y)$  hajonta pienenee. Koska  $E\{\bar{g}(x,y)\} = f(x,y)$ , tämä ehto tarkoittaa, että  $\bar{g}(x,y)$  lähestyy  $f(x, y)$ :ää keskiarvotusprosessin edetessä. Käytännössä kuvat  $g_i(x,y)$  on tallennettava lähtökuvan muokkautumisen varalta.

### Esimerkki

Kuvassa kp.18 (a) on kohinainen kuva solusta. Kuvissa kp.18 (b) ... (f) on tulokset 2, 8, 16, 32 ja 128:n kohinaisen kuvan keskiarvotuksesta. Visuaaliseen tarkasteluun kuva  $M = 32$  on riittävän kohinaton. Kuva kp.18 (f), jossa  $M = 128$ , on kaikkiin käytännön tarkoituksiin kohinaton.



*Kuva kp.18 Esimerkki kohinan vaimentamisesta keskiarvottamalla. Tyypillinen kohinainen kuva (a), tulokset 2, 8, 16, 32 ja 128:n keskiarvotuksen jälkeen (b) ... (f).*



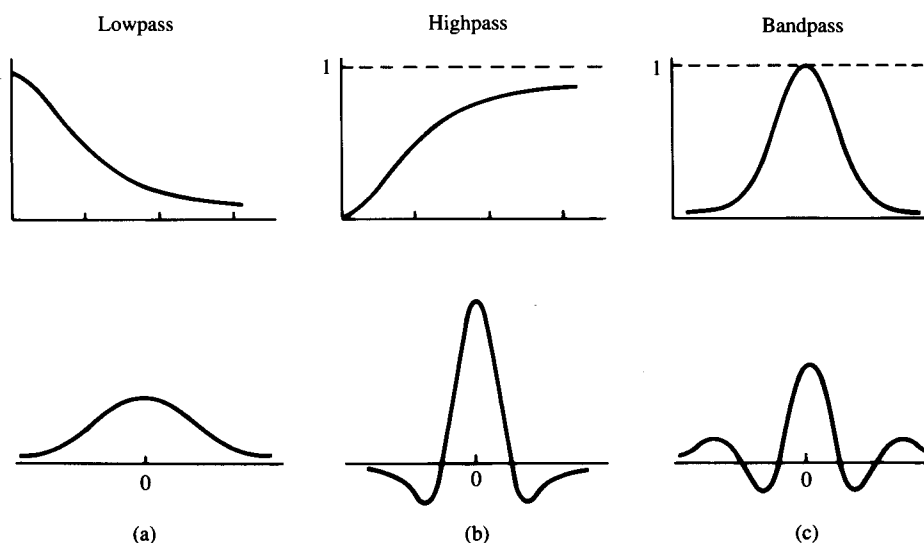
## SPATIAALINEN SUODATUS

Spatiaalisten maskien käyttöä sanotaan tavallisesti spatiaaliseksi suodatuksiksi vastakohtana taajuustason suodatukselle. Maskeja puolestaan sanotaan spatiaalisiksi suodattimiksi. Tässä jaksossa käsitellään lineaaristen ja epälineaaristen spatiaalisten suodattimien käyttöä kuvan muokkaamisessa.

Lineaariset suodattimet perustuvat taustaa käsittelevässä kappaleessa esiteltyyn konseptiin. Tällöin todettiin, että lineaarisen järjestelmän siirtofunktio ja impulssi- tai pisteen leviämiskäyrä ovat toistensa käänteiset Fourier-muunnokset. Alipäästösuo-datin vaimentaa tai poistaa kuvan taajuustason esityksestä, Fourier-muunnoksesta, suurtaajuisia komponentteja jättäen pientaajuiset komponentit ennalleen. Suurtaajuiset komponentit kuvassa edustavat reunoja ja muita teräviä yksityiskohtia. Lopputuloksena alipäästösuo-datuk-sesta on kuvan pehmeneminen. Vastaavasti ylipäästösuo-datin vaimentaa tai poistaa kuvasta pientaajuisia komponentteja. Nämä taajuudet edustavat hitaasti muuttuvia ominaisuuksia kuten kokonaiskontrastia tai keskimääräistä kirkkautta. Ylipäästösuo-datus pienentää näitä ominaisuuksia ja korostaa reunoja ja muita teräviä yksityiskohtia. Kolmas suodatintyyppi, kaistanpäästösuo-datin, vaimentaa sekä pieniä että suuria taajuuksia ja korostaa näiden väliin jäävää kaistaa. Näitä suodattimia käytetään kuvan korjaamiseen mutta ovat harvoin kiinnostavia kuvan parantamisen kannalta.

Kuvassa kp.19 on yksiulotteiset taajuustason kuvausympyräsymmetrisistä alipäästö-, ylipäästö- ja kaistanpäästösuo-dattimista taajuustasossa ja spatiaalitasossa. Vaaka-akseli ylärivin kuvissa on taajuusasteikko ja spatiaalitason suodattimissa vaaka-akseli vastaa spatiaalisia koordinaatteja. Alarivin suodattimien muotoja käytetään mallina spesivioitaessa spatiaalisia suodattimia.

Riippumatta suodattimen tyypistä, perusmenetelmä spatiaalisessa suodatuksessa on summata maskin ja kuvan vastinkomponenttien intensiteettiarvojen kertolaskun tulokset jokaisessa kuvan pisteessä. Tämän jälkeen tavallinen menetelmä on muodostaa uusi kuva, jonka maskin keskipistettä vastaava pikselin paikka saa näin lasketun arvon.



Kuva kp.19 Yläkuvissa on leikkauskuvat perus ympyräsymmetrisistä taajuustason suodattimista. Alakuvissa ovat leikkauskuvat vastaavista spatiaalitason suodattimista.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
| $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| $w_7$ | $w_8$ | $w_9$ |

Kuva kp.20  $3 \times 3$  maski yleisillä kertoimilla.

Kuvassa kp.20 on yleinen  $3 \times 3$  maski. Merkitsemällä maskin alla olevien pikselien harmaatasoja  $z_1, z_2, \dots, z_9$ , lineaarisen maskin vaste on

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_9 z_9 \quad (\text{kp.29})$$

Viittaamalla kuvaan kp.1, jos maskin keskipiste on kuvan kohdassa  $(x, y)$ , pikselin harmaataso korvataan  $R$ :llä. Tämän jälkeen maski siirretään seuraavan pikselin kohdalle ja prosessi toistetaan. Tämä jatkuu, kunnes kuvan kaikki pikset on prosessoitu. Osa kuvan reunoilla olevista pikseleistä lasketaan  $R$  vain osalla maskia. Edellä olevassa menetelmässä kuvan pikselit korvattiin uusilla arvoilla. Tällöin jo lasketut arvot vaikuttavat tulokseen. Tavallisempi menetelmä on muodostaa kokonaan uusi kuva lasketuista arvoista  $R$ .

Myös epälineaariset suodattimet käyttävät naapurustoa. Yleisesti niiden operaatiot perustuvat suoraan pikselien arvoihin eikä kertoimien käyttöön kuten lineaarisilla suodattimilla. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan erästä epälineaarisen suodatuksen sovellutusta. Kohinaan vaimekseen käytetään mediaanisuodatinta, jossa pikselin arvoksi valitaan maskin sisältä keskimäinen harmaataso. Toinen esimerkki on *max*-suodatin, jolla haetaan kuvan kirjkkain arvo. Tällöin  $R = \max\{z_k | k = 1, 2, \dots, 9\}$ . Päinvastainen esimerkki on *min*-suodatin.

## PEHMENNYSSUODATTIMET

Pehmennyssuodattimia käytetään epäterävöittämään kuvaa tai kohinan vaimennukseen. Epäterävöitystä käytetään esiprosessointina poistamaan kuvasta pieniä yksityiskohtia ennen suurten kohteiden tunnistamista tai erottamaan viivoja toisistaan. Kohinanvaimennukseen voidaan käyttää joko lineaarisia tai epälineaarisia suodattimia.

### Spatiaalinen alipäästösuodatus

Alipäästösuodattimen impulssivasteen muoto kuvassa kp.19 osoittaa, että suodattimen kertoimien on oltava positiivisia. Vaikka spatiaalisen suodattimen muotoa voidaan muokata kuvan kp.19 (a) tapaukseen nähden esimerkiksi Gaussin funktiolla, niin edelleen avainvaatimus on positiiviset kertoimet. Yksinkertaisin  $3 \times 3$  maski on sellainen, jossa kaikkien kertoimien arvot ovat ykkösiä. Tällöin jokaisen uuden kuvan pikselin arvo olisi summa yhdeksästä pikselistä, joka aiheuttaa sen, että  $R$  ylittää mahdollisesti sallitun maksimiarvon. Ratkaisuna tähän ongelmaan summa skaalataan jakamalla se 9:llä. Kuvassa kp.21 (a) on skaalattu maski.

Suuremmat maskit noudattavat samaa periaatetta. Tästä on esimerkit kuvissa kp.21 (b) ja (c). On huomattava, että kaikissa näissä tapauksissa vaste  $R$  on maskin sisällä olevien pikselien keskiarvo. Tästä syystä kuvan kp.21 mukaisia maskeja sanotaan naapurien keskiarvotukseksi. Kuvassa kp.22 on esimerkki epäterävöityksestä erikokoisilla maskeilla. On huomattava pehmyden lisääntyminen maskin koon kasvaessa.

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \frac{1}{25} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(a) (b)

Kuva kp.21 Erikokoisia spatiaalisia alipäästösuodattimia.

$$\frac{1}{49} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(c)

## Mediaanisuodattimet

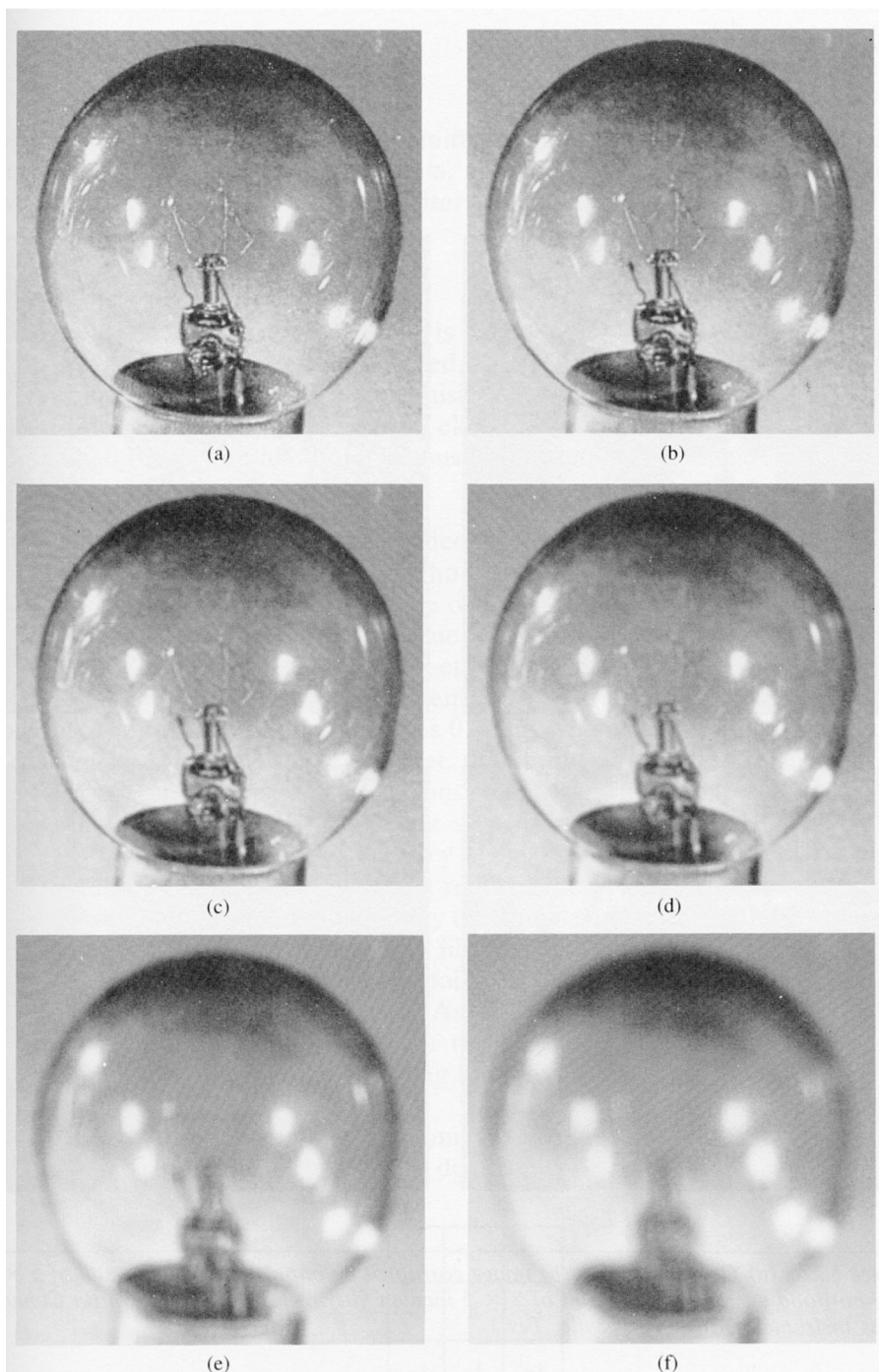
Eräs periaatteellinen ongelma edellä kuvatussa pehmennysmenetelmässä on, että se epäterävöittää reunoja ja muita pieniä yksityiskohtia. Jos tavoitteena on pikemminkin kohinan vaimennus kuin pehmentäminen, niin vaihtoehtoinen menetelmä on käyttää mediaanisuodatinta. Tässä menetelmässä pikseli korvataan valitunkokoisen ympäristön keskimmaisella harmaatasolla alueen keskiarvon asemesta. Tämä menetelmä on erityisen tehokas silloin kun kohina muodostuu voimakkaista pistemäisistä komponenteista ja on tarve säilyttää rajojen terävyys. Kuten aikaisemmin todettiin niin mediaanisuodatin on epälineaarinen.

Joukon, jonka koko on  $M + 1$ , mediaani  $m$  on arvo, jota pienempiä joukossa on  $M/2$  kappaletta ja suurempia samoin  $M/2$  kappaletta. Mediaanisuodatuksessa joukko järjestetään ensin suuruusjärjestykseen jonka jälkeen valitaan keskimäinen pikselin uudeksi arvoksi. Esimerkiksi  $3 \times 3$  naapuruston mediaani on viidenneksi suurin arvo ja vastaavasti  $5 \times 5$  naapuruston mediaani on 13:sta suurin arvo.

Kun useilla naapuripikselillä on sama arvo ne tulevat järjestyksessä ryhmiteltyä. Esimerkiksi oletetaan, että  $3 \times 3$  naapurin arvot ovat (10, 20, 20, 15, 20, 20, 25, 100). Nämä arvot tulevat järjestykseen (10, 15, 20, 20, 20, 20, 25, 100), jonka mediaani on 20. Mediaanisuodattimen pääfunktio on pakottaa pisteet, joiden arvot poikkeavat muista naapureistaan, enemmän naapureidensa kaltaisiksi. Tämä eliminoi yksittäiset poikkeavat pikseliarvot naapurustossa.

## Esimerkki

Kuvassa kp.23 (a) on alkuperäinen kuva. Kuvassa kp.23 (b) on sama kuva, mutta kohinan pilaamana niin, että n. 20 % pikselien arvoista on muuttunut. Kuvassa kp.23 (c) kohinaa on



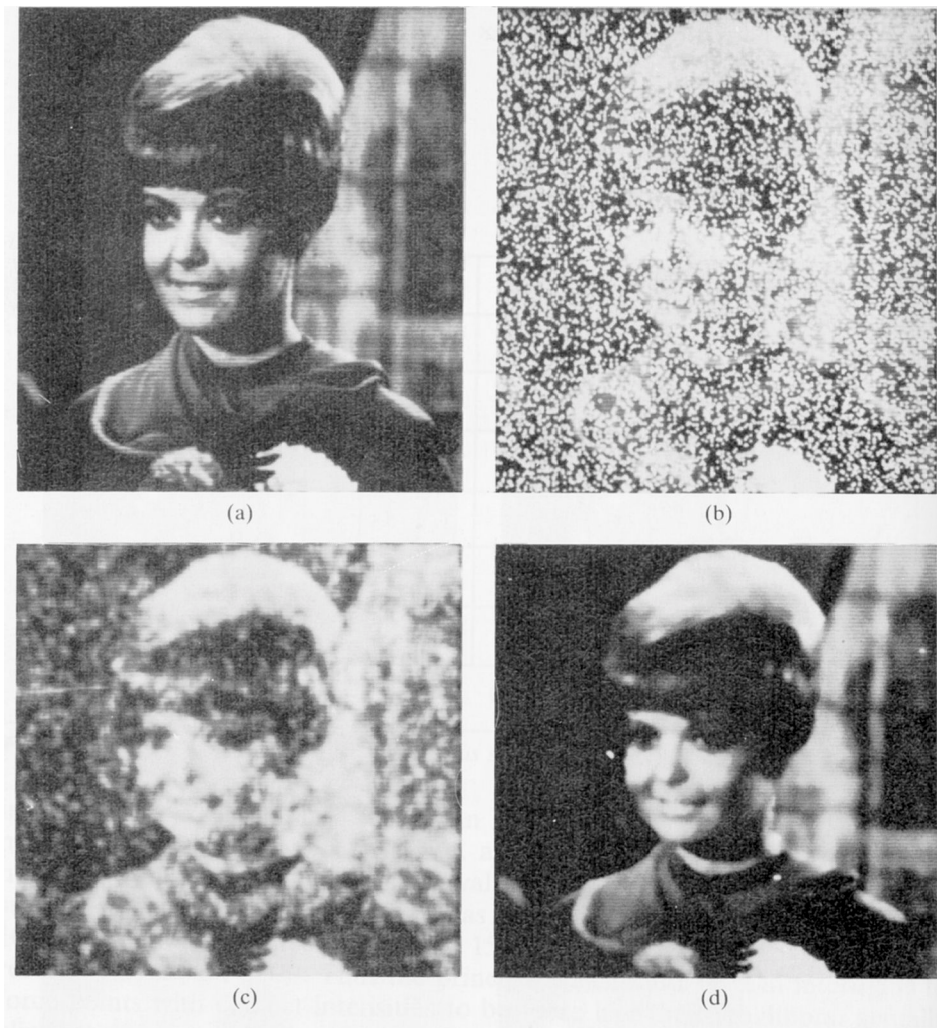
Kuva kp.22 Alkuperäinen kuva (a) tulokset spatiaalisen alipäästösuodatuksen jälkeen (b) ... (f), maskien koot ovat järjestyksessä  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ ,  $15 \times 15$  ja  $25 \times 25$

suodatettu naapuruston keskiarvotuksella. Maskin koko on  $5 \times 5$ . Kuvassa kp.23 (d) on käytetty  $5 \times 5$  mediaanisuuodattinta. Mediaanisuuodattimen paremmuus on ilmeinen. Kuvassa kp.23 (d) on edelleen muutama kirkas piste seurauksena kohinan keskittymisestä näillä alueilla. Kaksi tai kolme perättäistä mediaanisuuodatusta voisi hävittää nämä pisteet.

## TERÄVÖITYSSUODATTIMET

Terävöityssuodatuksen pääasiallinen tavoite on korostaa pieniä yksityiskohtia tai parantaa epäteräviä yksityiskohtia, jotka johtuvat joko virheistä tai joidenkin kuvannusmenetelmien luontaisista ominaisuuksista. Kuvan terävöittämistä käytetään mm. sähköisissä painomenetelmissä, lääketieteellisistä kuvauksista teolliseen tutkimukseen ja automaattiseen maalintunnistukseen.





Kuva kp.23 Alkuperäinen kuva (a), kohinan pilaama kuva (b), tulos  $5 \times 5$  keskiarvotuksen jälkeen (c) ja tulos  $5 \times 5$  medianisuodattimen jälkeen.

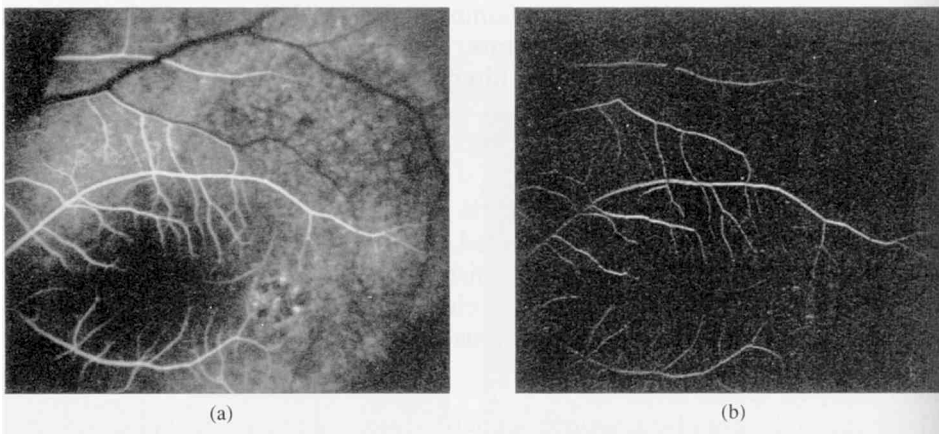
### Spatiaalinen ylipäästösuodatin

Impulssivasteen muoto, joka tarvitaan ylipäästösuodattimessa, osoittaa, että suodattimessa on positiiviset kertoimet lähellä maskin keskustaa ja negatiiviset kertoimet reunoilla (kuva kp.19b). Esimerkiksi valitsemalla  $3 \times 3$  maskissa positiivisen arvon keskipisteeseen ja muihin negatiiviset, täytetään tämä vaatimus.

Kuvassa kp.24 on klassinen  $3 \times 3$  terävöityssuodattimen toteutus. On huomattava, että kertoimien summa on 0. Kun maski on vakiona pysyvän tai hitaasti muuttuvan alueen päällä, maskin ulostulo on 0 tai hyvin pieni. Tämä vastaa tulosta, jota odotetaan vastaavalta taajuustason suodattimelta. Suodatin myös poistaa 0-taajuus termin. Aikaisemman perusteella tiedetään myös, että poistamalla kuvasta 0-taajuus, pienentämällä kuvan keskimääräinen harmaataso nollaan, pienenee myös kuvan kontrasti merkittävästi. Tästä on esimerkki kuvassa kp.25.

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kuva kp.24 Perus spatiaalinen ylipäästösuodatin



Kuva kp.25 Kuva ihmisen silmän suonikalvosta (a) ja ylipäästösuo-datettu kuva käytettäessä kuvan kp.24 maskia.

Kuvassa kp.25 (b) on kuva kp.25(a) ylipäästösuo-datettu kuvan kp.24 maskilla. Alkuperäisessä kuvassa on hienoja yksityiskohtia koko taustan alalla. Taustan harmaataso muuttuu hitaasti. Odotusten mukaisesti suodatetussa kuvassa ovat reunat korostuneet ja tausta on musta. Lopputulos ei ole kuitenkaan kovin hyvä. Parempi tulos saadaan ns high-boost suodatuksella, josta puhutaan seuraavassa kappaleessa.

Keskimääräisen harmaatason laskeminen nolnaan edellyttää negatiivisia harmaatasoja. Tämä ei kuitenkaan ole kuvassa mahdollista koska käytössä ovat vain positiiviset harmaatasot. Tästä syystä tarvitaan skaalaus, jolla kuvan harmaatasot saadaan välille  $[0, L - 1]$ . Negatiiviset harmaatasot voidaan myös yksinkertaisesti jättää huomiotta. Ottamalla harmaatasoista itseisarvo ja tekemällä tasoista näin positiivisia saattaa johtaa kuvan vääristymiseen. Tällöin negatiiviset arvot saattavat johtaa laajoihin kirkkaisiin alueisiin.

### High-boost suodatus

Ylipäästösuo-datettu kuva voidaan laskea myös alkuperäisen kuvan ja alipäästösuo-datetun kuvan erotuksena.

$$\text{Ylipäästö} = \text{alkuperäinen} - \text{alipäästö} \quad (\text{kp.30})$$

Harjoituksen vuoksi on opettavaista tarkistaa yhtälön (kp.30) voimassaolo yhdessä yhtälön (kp.29), kuvan kp.21 (b) ja kuvan kp.24 kanssa. Kertomalla alkuperäinen kuva vahvistuskertoimella  $A$ , johtaa high-boost tai suurtaajuus painotus suodatukseseen.

$$\begin{aligned} \text{High boost} &= (A)(\text{alkuperäinen}) - \text{alipäästö} \\ &= (A - 1)(\text{alkuperäinen}) + \text{alkuperäinen} - \text{alipäästö} \\ &= (A - 1)(\text{alkuperäinen} + \text{alipäästö}) \end{aligned} \quad (\text{kp.31})$$

Kun  $A = 1$ , saadaan normaali ylipäästösuo-datatus. Kun  $A > 1$ , osa alkuperäisestä kuvasta on lisätty takaisin ylipäästösuo-datettuun kuvaan. Tämä säilyttää osittain ylipäästösuo-datuksessa hävinneet pienet taajuudet. Lopputuloksena tästä operaatiosta hyllysuodatettu, high-boost. kuva on enemmän alkuperäistä kuvan kaltainen. Kuvassa olevien reunojen suhteellinen paraneminen riippuu  $A$ :n arvosta. Yleisesti prosessia, jossa alkuperäisestä kuvasta vähennetään pehmennetty kuva, sanotaan epäteräväytys maskaukseksi. Tämä on eräs perustyökalu kuvien painamisessa ja julkaisuissa.

$$\frac{1}{9} \times$$

|    |    |    |
|----|----|----|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | w  | -1 |
| -1 | -1 | -1 |

Kuva kp.26 Spatiaalisessa ylipäästö hyllysuodatuksessa käytetty maski

Ylipäästö hyllysuodatus voidaan toteuttaa antamalla kuvassa kp.24 maskin keskimmaiselle jäsenelle arvo

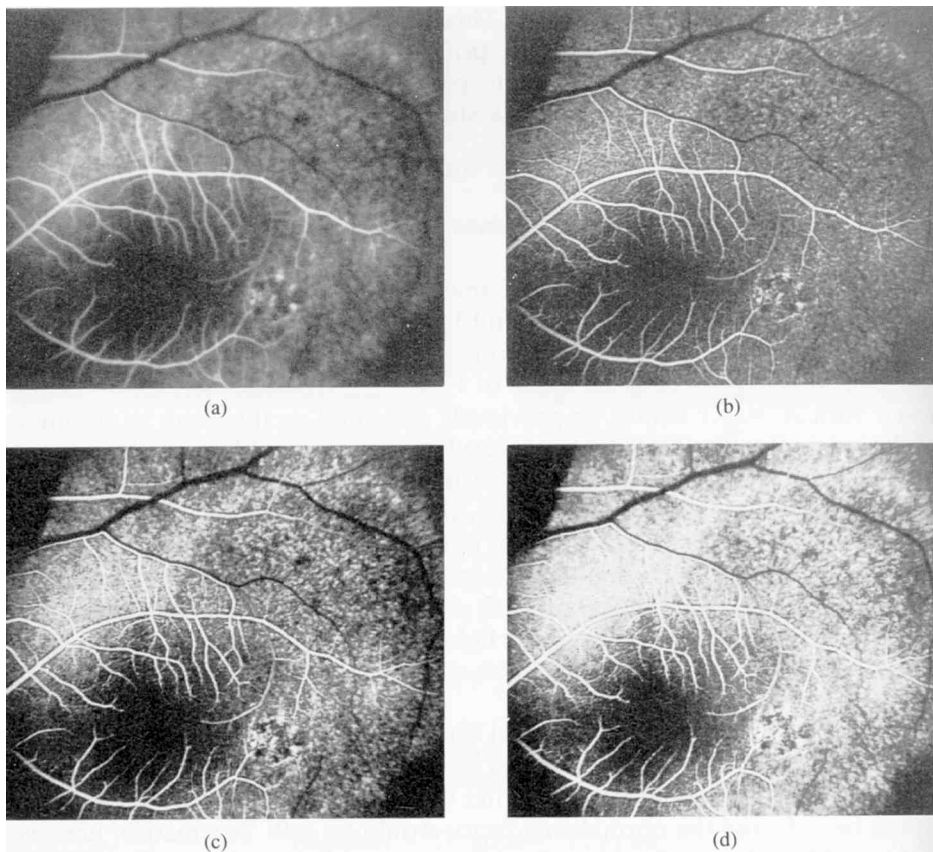
$$w = 9A - 1 \quad (\text{kp.32})$$

kun  $A \geq 1$ . A:n arvo määrittelee suodattimen luonteen. Maski on kuvassa kp.26.

### Esimerkki

Kuvassa kp.27 (a) on alkuperäinen ja kuvissa (b) ... (d) hyllysuodatetut kuvat. Kertoimen A arvot ovat 1,1 (b), 1,15 (c) ja 1,2 (d). Hyllysuodattimen käytön etu on helposti todettavissa vertaamalla tuloksia kuvaa kp.25 (b). Erityisesti kuvan (b) tulos, jossa ylipäästösuodatettuun kuvaan on lisätty 10 % alkuperäisestä kuvasta, on merkittävästi parempi verrattuna kuvaan kp.25 (b). A:n arvon kasvaessa tausta tulee kirkkaammaksi ja kuvan (d) tulos, jossa  $A = 1,2$ , on epätydyttävä. Myös kohina näyttelee merkittävää roolia hyllysuodatetuissa kuvissa. Tulos ei ole odottamaton, sillä ylipäästösuodatus korostaa kohinaa yhdessä muiden kuvassa esiintyvien terävien intensiteetti muutosten kanssa.

Kuten spatiaalisessa alipäästösuodatuksessa, niin myös spatiaalisessa ylipäästösuodatuksessa voidaan käyttää suurempi kuin  $3 \times 3$  maskeja. Esimerkiksi  $7 \times 7$  maskissa keskimmäisen



Kuva kp.26 Alkuperäinen kuva (a) ylipäästö hyllysuodatetut kuvat (b) ... (d), kun  $A = 1,1, 1,15$  ja  $1,2$

jäsenen painotuskerroin on 48 ja muiden jäsenten arvo on  $-1$ . Normalisointikertoimen arvo on  $1/49$ . Käytännössä kuitenkin harvoin tarvitaan suurempia kuin  $3 \times 3$  maskeja.

### Derivoivat suodattimet

Pikselien keskiarvottamisella jollakin alueella on tendenssinä pehmentää kuvaa. Kun keskiarvottaminen on analoginen operaatio integroinnille, derivoinnilla voidaan odottaa olevan päinvastainen vaikutus ja siten terävöittävän kuvaa.

Yleisin menetelmä derivoimiseksi kuvankäsittelyssä on gradientti. Funktion  $f(x, y)$  gradientti  $\nabla f(x, y)$  määritellään vektorina

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{kp.33})$$

Tämän vektorin itseisarvo

$$\nabla f = \text{mag}[\nabla f(x, y)] = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{kp.34})$$

on perusta eri lähestymistavoille kuvan derivointiin. Tarkastellaan kuvan aluetta, joka on kuvassa kp.28 (a), jossa  $z$  merkitsee kuvan harmaatasoa. Yhtälö (kp.34) voidaan arvottaa pisteessä  $z_5$  useallakin eri tavalla. Yksinkertaisinta on käyttää erotusta  $(z_5 - z_8)$   $x$  - suuntaan ja  $(z_5 - z_6)$   $y$  - suuntaan. Yhdistettynä saadaan

$$\nabla f \approx \sqrt{(z_5 - z_8)^2 + (z_5 - z_6)^2} \quad (\text{kp.35a})$$

Samatapainen tulos saadaan, kun neliöiden ja neliöjuuren asemesta käytetään itseisarvoja.

$$\nabla f \approx |z_5 - z_8| + |z_5 - z_6| \quad (\text{kp.35b})$$

Toinen lähestymistapa arvottaa yhtälö (kp.34) on käyttää ristikkäisiä erotuksia.

$$\nabla f \approx \sqrt{(z_5 - z_6)^2 + (z_5 - z_8)^2} \quad (\text{kp.36a})$$

tai vastaavasti käyttämällä itseisarvoja

$$\nabla f \approx |z_5 - z_6| + |z_5 - z_8| \quad (\text{kp.36b})$$

Yhtälöt (kp.35) ja (kp.36) voidaan toteuttaa  $2 \times 2$  maskilla. Esimerkiksi yhtälö (kp.36b) voidaan toteuttaa ottamalla kuvan kp.28 (b) maskien vasteista itseisarvot ja summaamalla tulokset. Kuvan kp.28 (b) maskeja sanotaan **Robertsin risti-gradientti-operaattoreiksi**.



|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
| $z_4$ | $z_5$ | $z_6$ |
| $z_7$ | $z_8$ | $z_9$ |

(a)

Kuva kp.28  $3 \times 3$  kuva- alue, jossa  $z$  merkitsee harmaatasoa (a). Erilaisia maskeja pisteen  $z_5$  derivaatan laskemiseksi. On huomattava, että kaikkien maskien termien summa on nolla johtaen 0 vakiotermiin kuten ylipäästösuodatukselta edellytetään.

|   |    |
|---|----|
| 1 | 0  |
| 0 | -1 |

|    |   |
|----|---|
| 0  | 1 |
| -1 | 0 |

(b) Roberts

|    |    |    |
|----|----|----|
| -1 | -1 | -1 |
| 0  | 0  | 0  |
| 1  | 1  | 1  |

|    |   |   |
|----|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| -1 | 0 | 1 |
| -1 | 0 | 1 |

(c) Prewitt

|    |    |    |
|----|----|----|
| -1 | -2 | -1 |
| 0  | 0  | 0  |
| 1  | 2  | 1  |

|    |   |   |
|----|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| -2 | 0 | 2 |
| -1 | 0 | 1 |

(d) Sobel

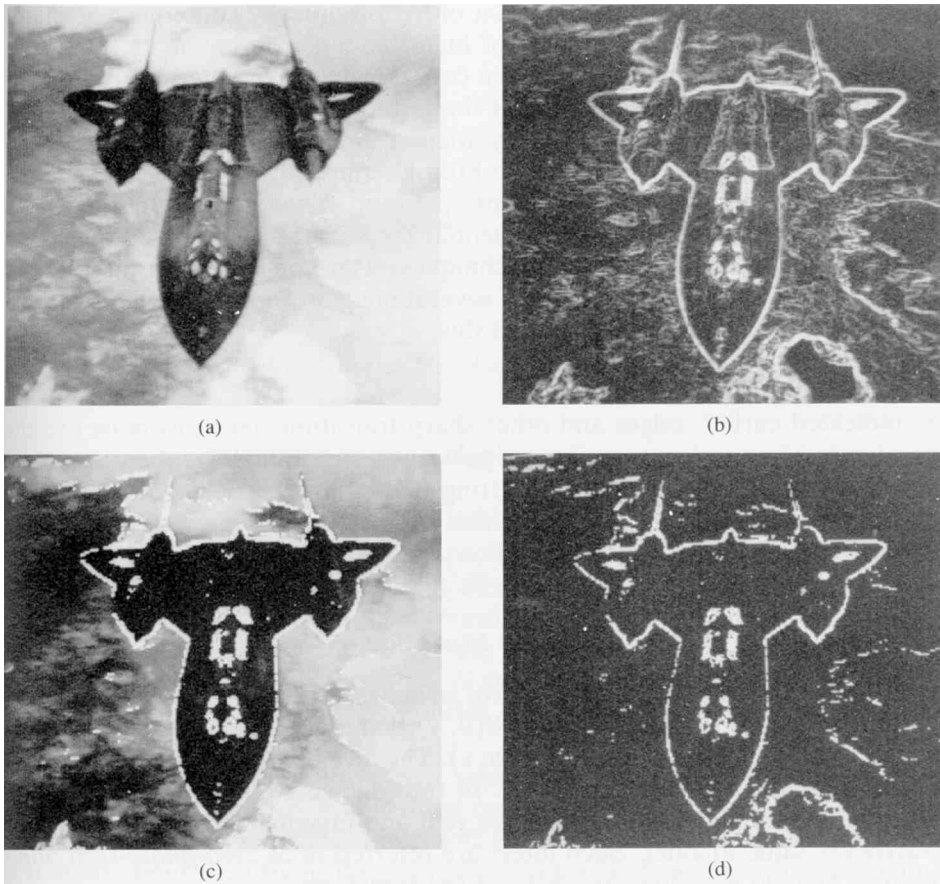
Parillisen kokoiset maskit ovat hankalia toteuttaa. Yhtälön (kp.34) ratkaisu edelleen pisteessä  $z_5$  mutta nyt  $3 \times 3$  ympäristössä on

$$\nabla f \approx \left| (z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3) \right| + \left| (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7) \right| \quad (\text{kp.37})$$

Ensimmäisen ja kolmannen rivin ero  $3 \times 3$  ympäristössä merkitsee derivointia  $x$  - suuntaan ja vastaasti ero ensimmäisen ja kolmannen sarakkeen välillä merkitsee derivointia  $y$  - suuntaan. Kuvassa kp.28 (c) olevaa  $3 \times 3$  maskia, jota sanotaan **Prewitt operaattoriksi**, voidaan käyttää yhtälön (kp.37) ratkaisemiseksi. Lopuksi kuvassa kp.28 (d) on maskipari, jota voidaan käyttää laskettaessa gradientin arvoja. Tätä maskia sanotaan **Sobel operaattoriksi**. Sobel operaattorista keskustellaan myöhemmin lisää.

### Esimerkki

Kuvassa kp.29 (a) on alkuperäinen kuva ja kuvassa kp.29 (b) on tulos, jossa on laskettu gradientti Prewitt maskia käyttäen. Kuva kp.29 (c) on saatu asettamalla jokainen gradientin arvo, joka ylittää arvon 25, maksimi valkoiseksi (255). Toisin sanoen 10 % tai suurempi harmaataso-arvo maksimi-arvosta on asetettu valkoiseksi. Jokainen gradientin arvo, joka ei täytä tätä kriteeriä, on asetettu alkuperäiseen harmaatasoon. Tuloksena kuvan tausta on jäänyt ennalleen kun samanaikaisesti reunat ovat korostuneet. Viimeisessä kuvassa kp.29 (d) menetelmä on ollut sama kuin kuvassa kp.29 (c) mutta sillä erolla, että ellei gradientti ole



*Kuva kp.29 Kuvan muokkaaminen gradientti-tekniikalla.*

saavuttanut arvoa 25, pikselin arvoksi on annettu nolla (musta). Viimeinen kuva on selvästi binäärikuva. Kaikissa tapauksissa reunat ovat korostuneet merkittävästi.

## KUVAN MUOKKAAMINEN TAAJUUSTASOSSA

Kuten aikaisemmin todettiin, kuvan muokkaaminen taajuustasossa on suoraviivainen tehtävä. Ensiksi lasketaan kuvan Fourier-muunnos. Toiseksi kuvan Fourier-muunnos kerrotaan suodatinfunktiolla ja lopuksi lasketaan käänteinen Fourier-muunnos muokatun kuvan saamiseksi.

Idea kuvan pehmentämiseksi vähentämällä suuria taajuuksia tai terävöittäminen lisäämällä suurten taajuuksien osuutta tulee suoraan Fourier-muunnoskonseptista. Itse asiassa lineaarisen suodatuksen idea on merkittävästi houkuttelevampi taajuustasossa verrattuna spatiaalitasoon. Käytännössä pieniä spatiaalisia maskeja käytetään merlittävästi enemmän kuin Fourier-muunnosta koska spatiaalinen maski on yksinkertainen toteuttaa ja nopea laskea. Kuitenkin taajuustason menetelmien ymmärtäminen on oleellista sillä monet ongelmat on helpompi ratkaista taajuustasossa. Homomorfinen suodatin ja muut vastaavat tekniikat, joita käsitellään tässä jaksossa, ovat esimerkkejä tämäntyyppisistä ratkaisuksista.

## ALIPÄÄSTÖSUODATUS

Kuten aikaisemmin on todettu, reunat ja muut terävät transiitit kuvassa tuottavat Fourier-muunnoksen suurtaajuiset komponentit. Siten kuvan pehmentäminen voidaan saada aikaan taajuustasossa vaimentamalla sen Fourier-muunnoksen tiettyjä suurtaajuisia komponentteja. Yhtälön (kp.4) mukaan

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (\text{kp.38})$$

jossa  $F(u, v)$  on pehmenettävän kuvan Fourier-muunnos. Tehtävänä on valita sellainen siirtofunktio  $H(u, v)$  joka vaimentaa sopivasti Fourier-muunnoksen  $F(u, v)$  suurtaajuisia komponentteja niin, että saadaan haluttu tulos  $G(u, v)$ . Tämän jälkeen saadaan käänteisellä Fourier-muunnoksella haluttu pehmenetty kuva  $g(x, y)$ . Seuraavassa tarkastelussa keskitytään sellaisiin siirtofunktioihin, jotka vaikuttavat samalla tavoin Fourier-muunnoksen reaali- ja imaginaariosiin. Tällaisia suodattimia sanotaan nolla-vaihesiirto-suodattimiksi koska ne eivät vaikuta muunnoksen vaiheisiin.

### Ideaallinen alipäästösuodatin

Kaksi-ulotteinen ideaallinen alipäästösuodatin (ILPF) Täyttää vaatimuksen

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{kun } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{kun } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (\text{kp.39})$$

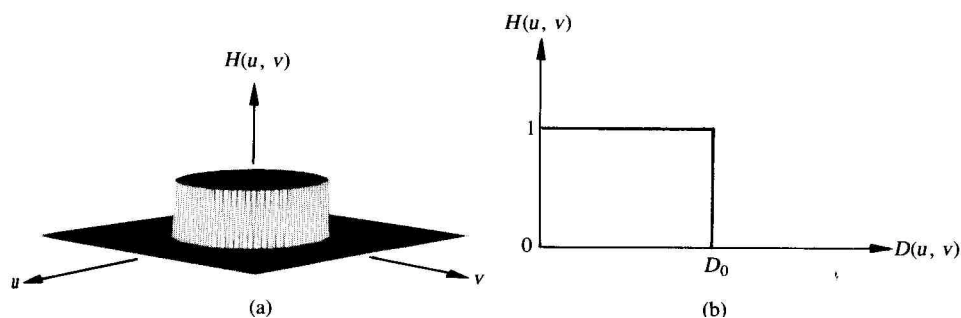
jossa  $D_0$  on positiivinen luku ja  $D(u, v)$  on taajuustasossa etäisyys pisteestä  $(u, v)$  origoon, jolloin

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (\text{kp.40})$$

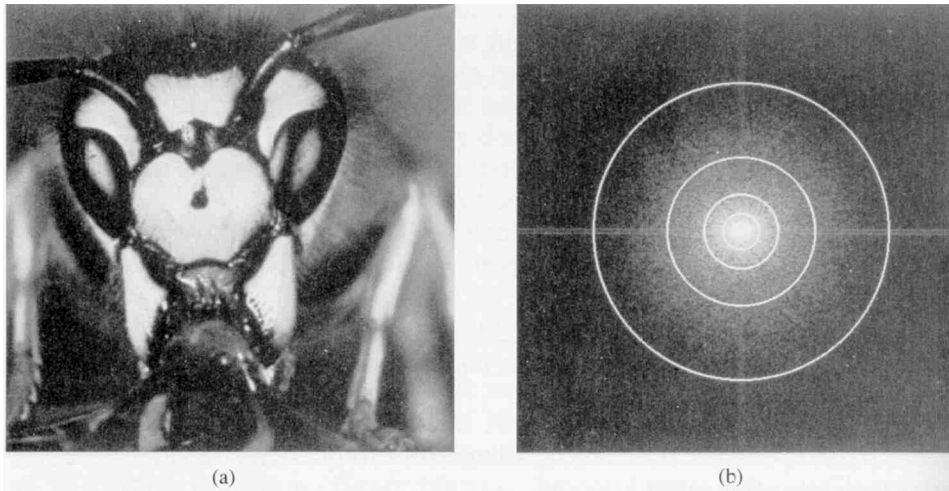
Kuvassa kp.30 (a) on kolmi-ulotteinen perspektiivikuva  $H(u, v)$ :stä  $u$ :n ja  $v$ :n funktiona. Nimitys ideaallinen tarkoittaa, että säteen  $D_0$  sisäpuolella ei tapahdu lainkaan vaimenemista ja sen ulkopuolella kaikki taajuuskomponentit ovat täysin vaimentuneet.

Tässä tarkastelussa alipäästösuodattimen oletetaan olevan säteettäisesti symmetrinen origon suhteen. Tällöin voidaan suodatin spesifioida leikkauksena origosta rajataajuuteen saakka ja lopullinen suodatin saadaan pyöryttämällä leikkaus  $360^\circ$  origon ympäri. Säteettäisesti symmetrisen suodattimen käyttö edellyttää, että  $N \times N$  taajuusneliössä origo on siirretty neliön keskelle.

Ideaallisen suodattimen taajuutta, jolla  $H(u, v) = 1$  muuttuu arvoksi  $H(u, v) = 0$ , sanotaan päästökaistan rajataajuudeksi. Esimerkiksi kuvassa kp.30 (b) päästökaistan rajataajuus on  $D_0$ . Kun suodattimen leikkauskuvaa pyörytetään origon ympäri,  $D_0$  piirtää ympyrän, jolla kaikki



Kuva kp.30 Perspektiivikuva ideaallisen alipäästösuodattimen siirtofunktiosta (a) ja vastaava leikkauskuva (b)



Kuva kp.31  $512 \times 512$  kuva (a) ja sen Fourier-muunnos (b). Fourier-muunnos-kuvaan on lisätty ympyrät, joiden säteet ovat 8, 18, 43, 78 ja 152. Ympyröiden sisään jäävällä alalla on kuvan tehosta samassa järjestyksessä 90, 93, 95, 99 ja 99,5 prosenttia.

taajuudet ovat päästökaistan rajataajuuksia. Tämä päästökaistan rajataajuuksien ura muodostaa käyttökelpoisen tavamn verrata eri suodattimia toisiinsa.

Ideaalisen alipäästösuodattimen jyrkkää siirtokaistaa ei voida toteuttaa elektroniikan komponenteilla, mutta sitä voidaan kylläkin simuloida tietokoneessa. Ideaalisen ei fyysisen suodattimen vaikutuksia tarkastellaan seuraavassa esimerkissä.

### Esimerkki

Kuvassa kp.31 (a) on eurooppalainen herhiläinen syömässä kypsän luumun maltoa. Kuva on valittu esimerkkiin sen vaihtelevien yksityiskohtien vuoksi. Kuvassa on sekä hienoja että suuria yksityiskohtia. Erityisesti on huomattava pään yläosassa oleva valkea piste, tuntosarvien heijastukset ja pieni tumma alue pään etuosassa.

Alipäästösuodattimien vaikutuksia on verrattu kuvassa kp.31 olevilla taajuuksilla. Eräs tapa muodostaa standardoituja suodattimia on laskea ympyrät, joiden sisään jää erilaiset määrät signaalin kokonaistehosta  $P_T$ . Tämä voidaan tehdä summaamalla jokaisen pisteen  $(u, v)$  teho kun  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , jolloin

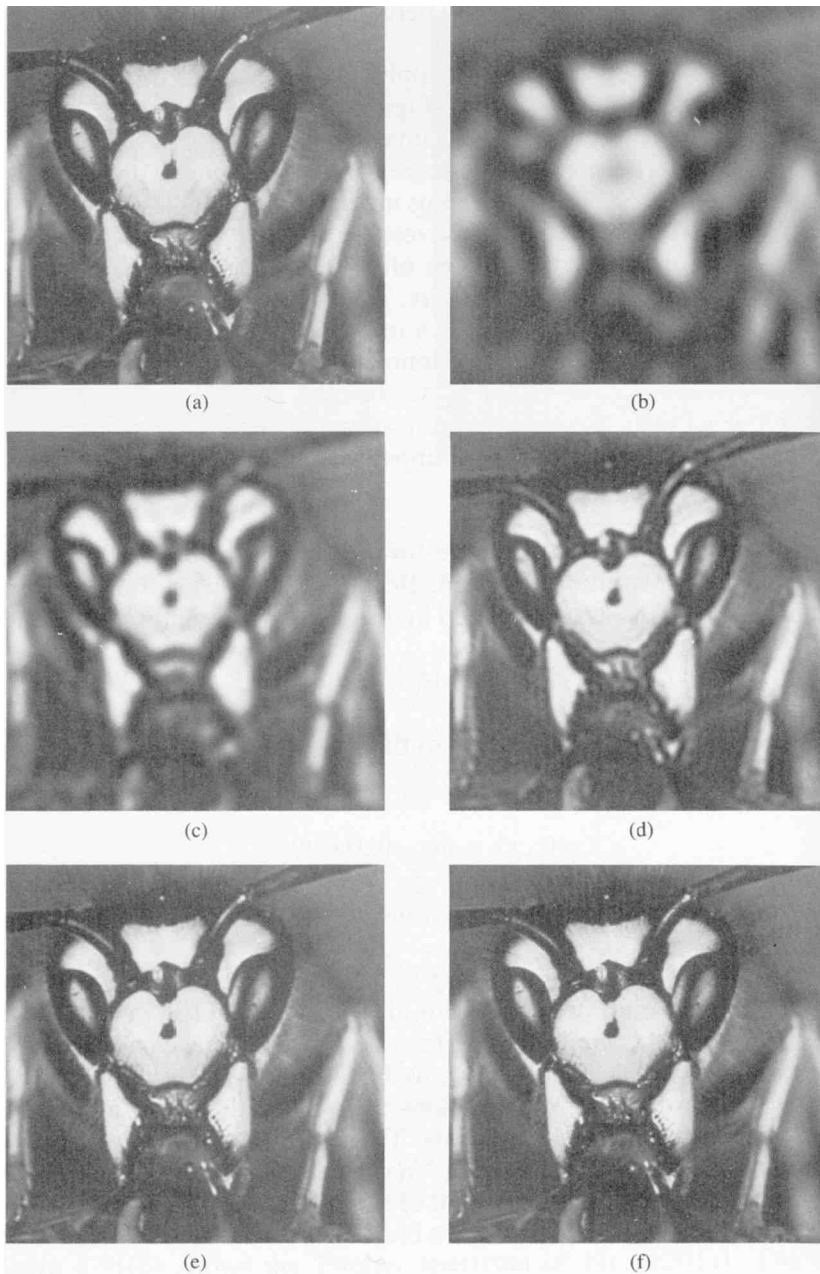
$$P_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

jossa  $P(u, v)$  on annettu yhtälössä (kp.13). Jos muunnos on keskitetty niin origokeskisen säteen  $r$  rajoittamalla alueella on  $\beta$  prosenttia kokonaistehosta.

$$\beta = 100 \left[ \sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

jossa summaus otetaan sen alueen yli, joka jää säteen  $r$  rajoittaman alueen sisäpuolelle.

Kuvassa kp.31 (b) on kuvan kp.31 (a) Fourier-muunnos. Kuvaan piirrettyjen ympyröiden säteet ovat 8, 18, 43, 78 ja 152. Näiden säteiden rajoittamien alueiden sisään jää vastaavasti

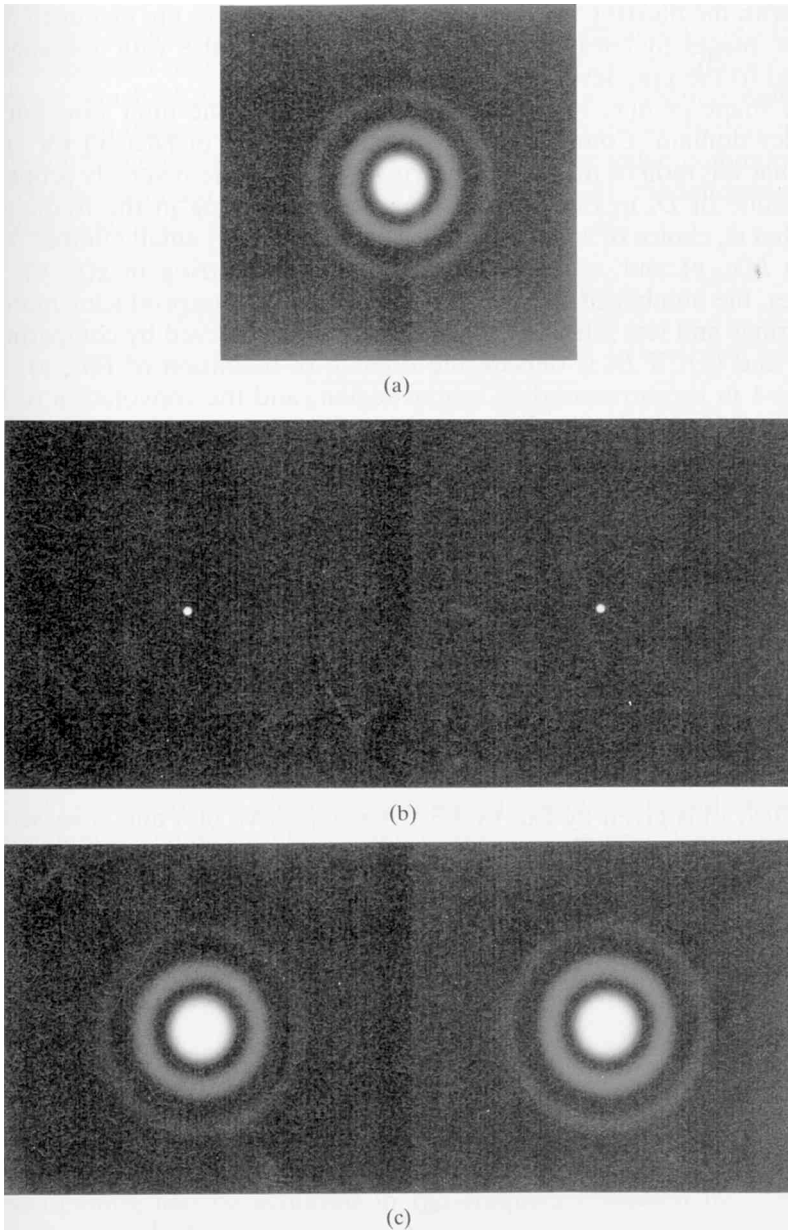


Kuva kp.32 Alkuperäinen kuva (a) tulokset ideaalisilla alipäästösuodattimilla kun säteet ovat 8 (b), 18 (c), 43 (d), 73 (e) ja 152 (f).

kokonaistehosta osa  $\beta = 90, 93, 95, 99$  ja  $99,5$ . Spektri suppene nopeasti sillä 90 % tehosta on varsin pienellä alueella, jonka säde on 8.

Kuvassa kp.32 on tulokset ideaalisen alipäästösuodattimen soveltamisesta. Kuva kp.32 (a) on käyttökelvoton mihinkään käytännön tarkoitukseen. Paha pehmeneminen osoittaa, että kuvan terävät yksityiskohdat sisältävät 10 % kuvan kokonaistehosta. Säteen kasvaessa kuvan pehmeneminen pienenee ja entistä pienempi osa kuvan energiasta on suodatettu pois. Vielä siinä tapauksessa, jossa kuvasta on suodatettu 5 % energiasta, pehmeässä kuvassa esiintuu selvä värähtely. Tämä johtuu ideaalisen suodattimen ominaisuuksista. Vielä silloin kun vain 1 % energiasta on suodatettu pois, kuva on lievästi pehmentynyt, mikä näkyy pään päällä olevasta valkeasta pisteestä ja tuntosarvien heijastuksista. Lopuksi tulos, jossa  $\beta = 99,5$ . Tämä kuva on subjektiivisesti sama kuin alkuperäinen kuva. Tässä tapauksessa kuvan kaikkein hienoimmat yksityiskohdat sisältävät kuvan kokonaisenergiasta vai 0,5 %.





Kuva kp.33 Kuvan pehmenysprosessin valotus spatiaalitasossa. Ideaalisen alipäästösuodattimen impulssivaste  $h(x, y)$  (a), yksinkertainen kahdesta pisteestä muodostettu kuva (b) ja kuvan  $f(x, y)$  ja impulssivasteen  $h(x, y)$  konvoluutio.

Ideaalisen alipäästösuodattimen pehmennys ja värähtelyominaisuudet voidaan selittää helposti konvoluution avulla. Alkuperäisen ja pehmenetyn kuvan Fourier-muunnokset sitoo toisiinsa yhtäläisyys

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

Konvoluutioteoreeman mukaan tämä on spatiaalitasossa

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

jossa  $h(x, y)$  on siirtofunktion  $H(u, v)$  käänteinen Fourier-muunnos. Avaintekijä pehennyksen ymmärtämiseksi konvoluutioprosessissa spatiaalitasossa on ideaalisen alipäästösuodattimen impulssivasteen  $h(x, y)$  ominaisuudet. Impulssivasteen yleinen muoto on kuvassa kp.33 (a). Oletetaan, että  $f(x, y)$  on yksinkertainen kuva, joka muodostuu kahdesta kirkkaasta pisteestä mustalla taustalla kuten kuvassa kp.33 (b). Kaksi kirkasta pistettä voidaan nähdä kahtena impulssina, joiden arvo riippuu pisteiden kirkkaudesta. Tämän jälkeen kuvan

$f(x, y)$  ja impulssivasteen  $h(x, y)$  konvoluutio kopioi impulssivasteen kummankin pisteen paikalle. Tämän operaation tulos kuvassa kp.33 (c) selittää miten alkuperäiset pisteet ovat pehmentyneet kuvan  $f(x, y)$  ja impulssivasteen  $h(x, y)$  konvoluutiossa. Konsepti voidaan laajentaa koskemaan monimutkaisempia kuvia pitämällä kuvan jokaista pistettä impulssina, jonka arvo riippuu pikselin harmaatasosta.

Impulssivasteen  $h(x, y)$  muoto riippuu taajuustason suodattimen siirtofunktion  $H(u, v)$  säteestä. Ideaalisen alipäästösuodattimen siirtofunktion  $H(u, v)$  käänteinen Fourier-muunnos osoittaa, että impulssivasteen renkaiden säde riippuu käänteisesti päästökaistan rajataajuudesta  $D_0$ . Näin valitsemalla pieni  $D_0$ :n arvo, impulssivasteella spatiaalitasossa esiintyy suhteellisen vähän mutta leveitä renkaita.  $D_0$  taajuuden muuttuessa nolasta kohti maksimitaajuutta renkaiden lukumäärä kasvaa, niiden leveys pienenee ja kuvan pehmeneminen vähenee. Jos  $D_0$  menee  $F(u, v)$ :n määrittelyalueen ulkopuolelle,  $h(x, y)$  on 1 koko kuvan alalla ja  $f(x, y)$ :n ja  $h(x, y)$ :n konvoluutio on  $f(x, y)$ . Tämä vastaa tilannetta, jossa ei suoriteta suodatusta.

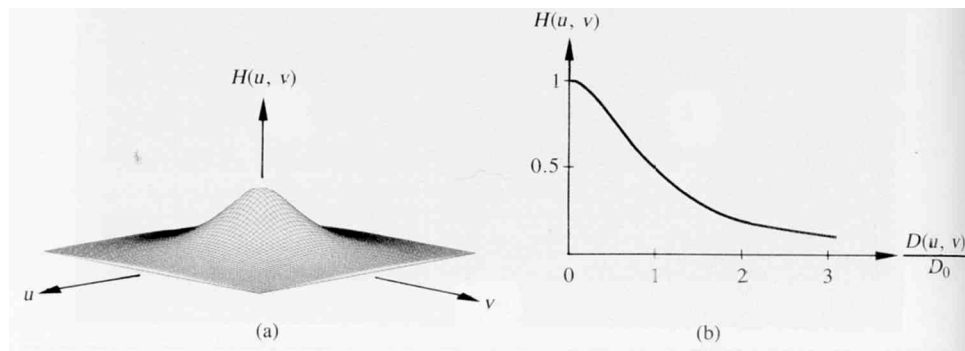
### Butterworth alipäästösuodatin

$N$ :nnen kertaluvun Butterworth alipäästösuodattimen (BLPF) siirtofunktio  $H(u, v)$  määritellään seuraavasti.

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2N}} \quad (\text{kp.41})$$

jossa  $D(u, v)$  on annettu yhtälössä (kp.40) ja  $D_0$  on päästökaistan rajataajuus. Siirtofunktion perspektiivi- ja leikkauskuvat ovat kuvassa kp.34.

Toisin kuin ideaalisessa alipäästösuodattimessa, Butterworth alipäästösuodattimessa ei ole jyrkkää siirtokaistaa päästökaistan ja estokaistan välillä eikä estokaista mene nolaa missään kuvan Fourier-muunnoksen alueella. Suodattimille, joilla on loiva siirtokaista, päästökaistan raja määritellään sinä taajuutena, jona siirtofunktion arvo on pudonnut johonkin määrättyyn arvoon. Yleisesti käytetty arvo on  $H(u, v) = 0,5$  kun  $D(u, v) = D_0$ . Toinen yleisesti käytetty arvo on  $1/\sqrt{2}$  kertaa  $H(u, v)$ :n maksimiarvo. Yhtälö (kp.41) vastaa tilannetta  $H(u, v) = 0,5$  kun  $D(u, v) = D_0$ . Jotta sataisiin jälkimmäinen vaihtoehto, täytyy yhtälöä (kp.41) muokata jonkinverran.



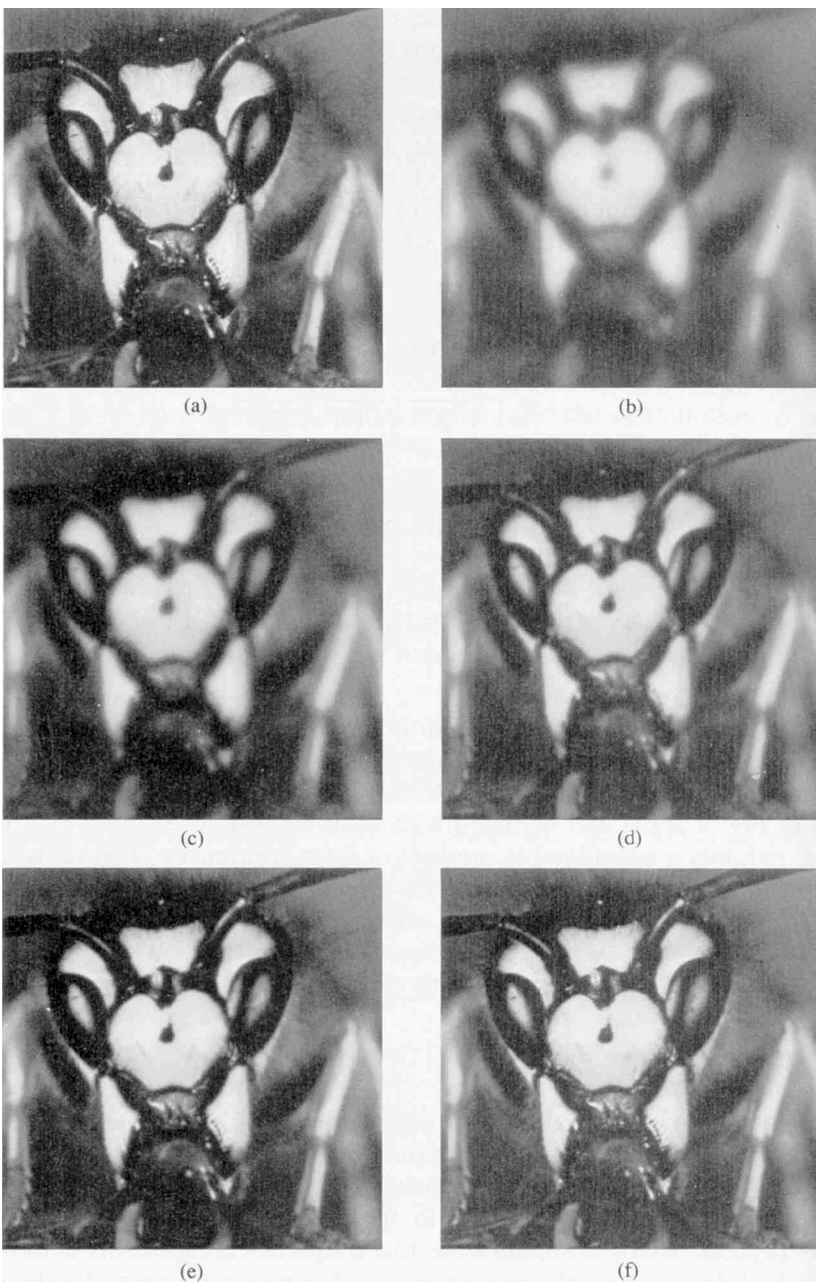
Kuva kp.34 Butterworth alipäästösuodattimen siirtofunktion perspektiivikuva (a) ja vastaava leikkauskuva (b) kun  $N = 1$ .

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D(u,v)/D_0]^{2N}} = \frac{1}{1 + 0,4142[D(u,v)/D_0]^{2N}} \quad (\text{kp.42})$$

### Esimerkki

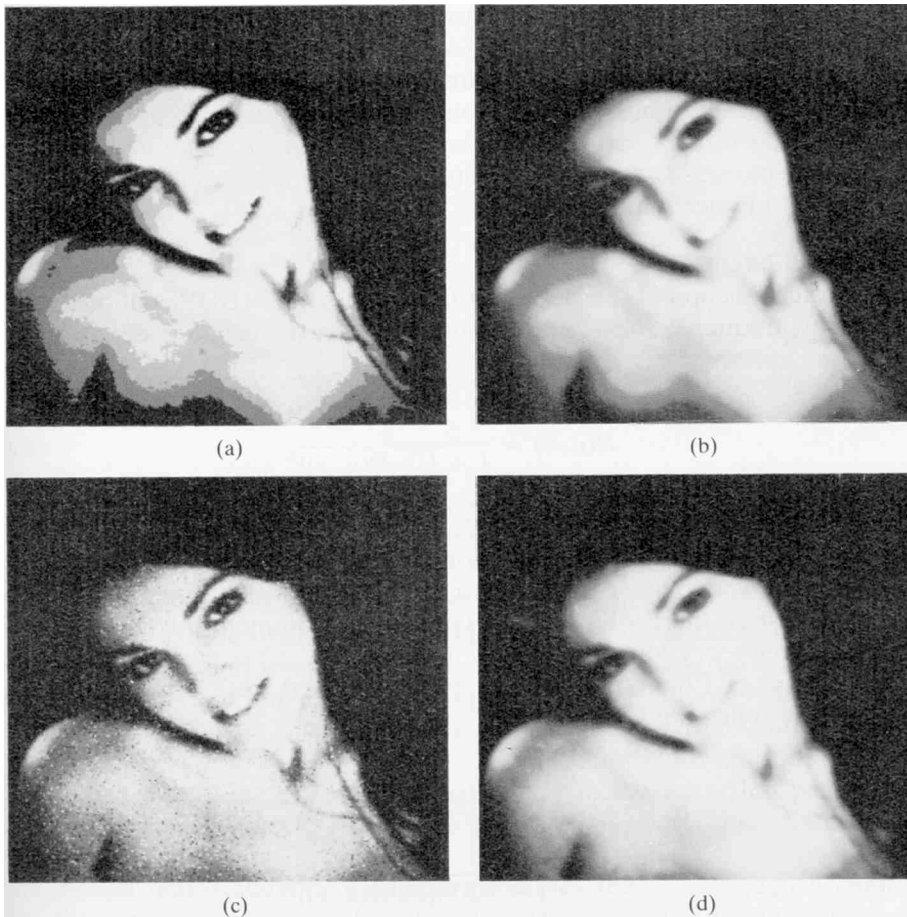
Kuvassa kp.35 on tulokset suodatuksesta, jossa kuvaan kp.31 (a) on käytetty ensimmäisen kertaluvun Butterworth alipäästösuoatinta.  $D_0$  vastaa viittä kuvassa kp.31 (b) olevaa sädettä. Toisin kuin kuvan kp.32 tuloksissa, nyt nähdään pehmenemisen muutos riippuen poisjäävän osan energiasta. Lisäksi kuvissa ei ole näkyvissä värähtelyä. Tämä on seurausta Butterworth alipäästösuoatimen äärellisestä siirtokaistasta.

Alipäästösuoatusta on edellä sovellettu hyvälaatuisiin kuviin, jotta nähtäisiin suodatuksen vaikutus selvästi. Kuvassa kp.36 on kaksi käytännön tilannetta, joihin käytetään kuvan pehmennystä. Kuva kp.36 (a) on digitoitu vain 16 harmaasävyllä ja kuvassa on nähtävissä



Kuva kp.35 Aluperäinen kuva (a) tulokset Butterworth alipäästösuoatuksen jälkeen (b) ... (f). päästökaistan rajataajuu-  
det on esitetty kuvassa kp.31 (b)





Kuva kp.36 Kaksi  
esimerkkiä kuvan  
pehmentämisestä  
alipäästösuodatuk-  
sella

huomattavassa määrässä virheitä. Kuvassa kp.36 (b) on tulos ensimmäisen kertaluvun Butterworth alipäästösuodatuksen jälkeen. Vastaavasti kuvassa kp.36 (c) on kohinaa ja kuvassa kp.36 (d) on käytetty Butterworth alipäästösuodatinta. Näistä esimerkeistä nähdään, että alipäästösuodatus on kosmeettinen prosessi, joka vähentää kuvan virheitä terävyyden kustannuksella.

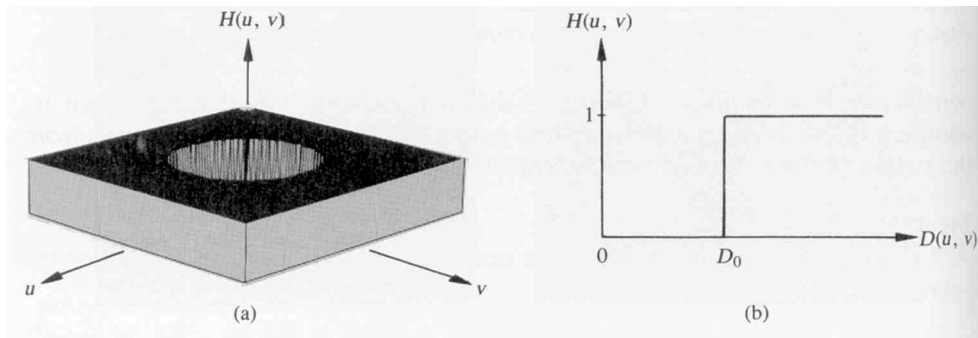
## YLIPÄÄSTÖSUODATUS

Aikaisemmin on osoitettu, että kuvaa voidaan pehmentää vaimentamalla sen Fourier-muunnoksen suurtaajuisia komponentteja. Koska reunat ja muut nopeat muutokset harmaatasoissa edustavat suuria taajuuksia, kuvan terävöittäminen voidaan saada aikaan ylipäästösuodatuksella. Tämä vaimentaa pieniä taajuuksia vaikuttamatta suuriin taajuuksiin. Myös ylipäästösuodattimien tapauksessa käsitellään vain ympyräsymmetrisiä nollavaihesiirto-suodattimia, joiden Fourier-muunnoksen origo on siirretty kuva-alan keskelle.

### Ideaallinen ylipäästösuodatin

Ideaalisen 2-ulotteisen ylipäästösuodattimen, IHPF, siirtofunktio täyttää vaatimuksen

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{kun } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{kun } D(u,v) > D_0 \end{cases} \quad (\text{kp.43})$$



Kuva kp.37 Perspektiivi- ja leikkauskuvat ideaalisesta ylipäästösuodattimesta.

jossa  $D_0$  on päästökaistan rajan etäisyys origosta taajuustasossa ja  $D(u, v)$  on annettu yhtälössä (kp.40). Kuvassa kp.37 ovat perspektiivi- ja leikkauskuvat ideaalisesta ylipäästösuodattimesta. Tämä suodatin toimii päinvastoin kuin ideaalinen alipäästösuodatin. Suodatin vaimentaa taajuutta  $D_0$  pienemmät taajuudet täysin ja jättää sitä suuremmat taajuudet koskemattomiksi. Myöskään ideaalista ylipäästösuodatinta ei voida toteuttaa fyysisesti.

### Butterworth ylipäästösuodatin

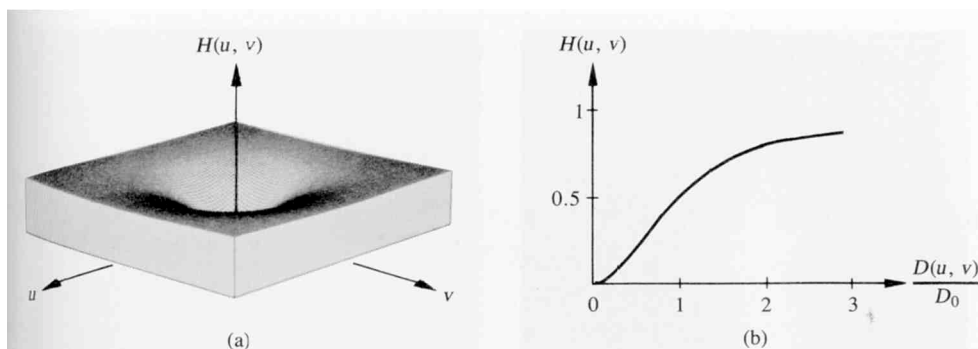
$N$ :nnen kertaluvun Butterworth ylipäästösuodattimen, jonka päästökaistan rajataajuus on  $D_0$ , siirtofunktio on

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2N}} \quad (\text{kp.44})$$

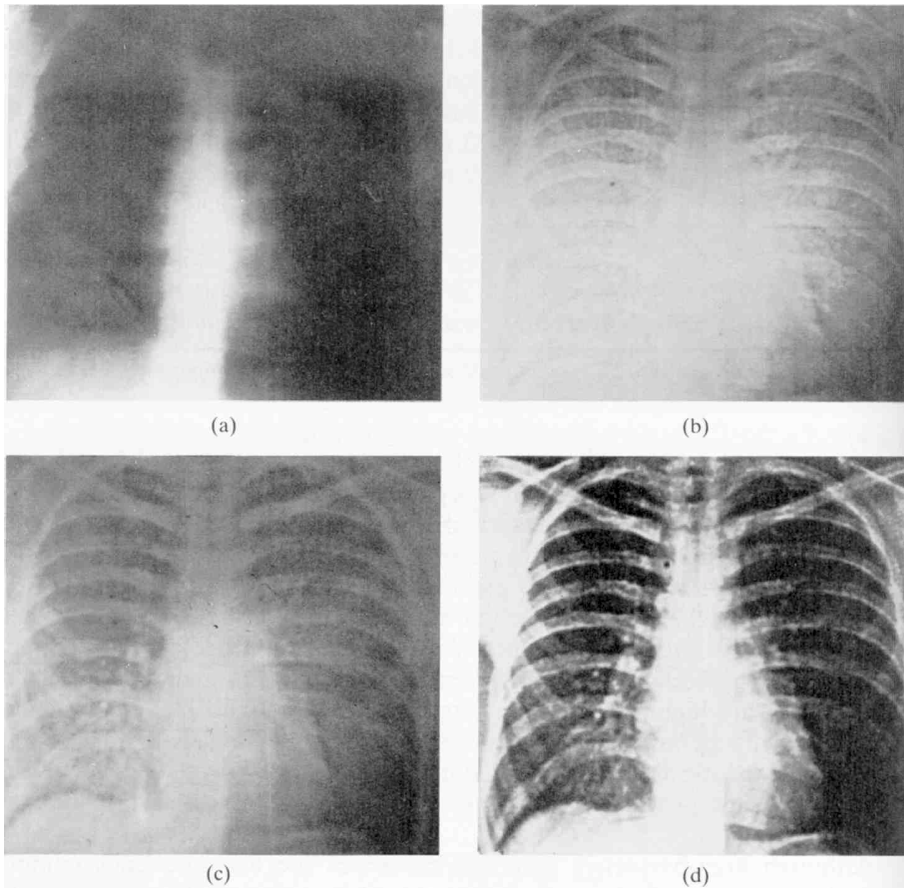
jossa  $D(u, v)$  on pisteen etäisyys origosta. Kuvassa kp.38 on Butterworth ylipäästösuodattimen perspektiivi- ja leikkauskuvat.

Yhtälö (kp.44) edustaa tapausta, jossa  $H(u, v) = 0,5$  kun  $D(u, v) = D_0$ . Kuten Butterworth alipäästösuodattimen tapauksessa, niin myös ylipäästösuodattimen päästökaistan rajataajuudeksi määritellään usein  $H(u, v) = 1/\sqrt{2}$ . Yhtälö (kp.44) voidaan muokata tätä rajataajuutta vastaavaksi

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D_0 / D(u, v)]^{2N}} = \frac{1}{1 + 0,4142[D_0 / D(u, v)]^{2N}} \quad (\text{kp.45})$$



Kuva kp.38 Perspektiivi ja leikkauskuvat Butterworth ylipäästösuodattimesta kun  $N = 1$ .



Kuva kp.39 Esi-  
merkki ylipäästö-  
suodattuksesta. Al-  
kuperäinen kuva (a),  
Butterworth  
ylipäästösuodatti-  
mella prosessoitu  
kuva (b), tulos  
suurtaajuuspaino-  
tuksesta (c) ja tulos  
suurtaajuuspaino-  
tuksesta yhdistetty-nä  
histogrammin  
tasaukseen.

### Esimerkki

Kuvassa kp.39 (a) on röntgenkuva rintakehästä. Kuva on huonosti kehitetty. Kuvassa kp.39 (b) kuva on prosessoitu ensimmäisen kertaluvun Butterworth ylipäästösuodattimella. Vain reunat ovat korostuneet koska pientaajuiset komponentit ovat voimakkaasti vaimentuneet. Tämä saa erilaiset hitaasti muuttuvat harmaatasot vaimenemaan samalle tasolle.

Tämän ongelman poistamiseksi käytetään usein tekniikkaa, jossa ylipäästösuodattimen siirtofunktioon lisätään vakio, joka säilyttää pientaajuiset komponentit. Menetelmä vahvistaa suuria taajuuksia tekijällä, joka on suurempi kuin alkuperäinen kuva. Tekniikkaa sanotaan suurtaajuuspainotukseksi. Menetelmällä saavutettu tulos on kuvassa kp.39 (c). Tässä tapauksessa kuvan luettavuus on parantunut jonkin verran varsinkin kuvan vasemmassa alaosassa. Menetelmä on vastaava kuin spatiaalitason hyllysuodatus.

Vaikka suurtaajuuspainotus säilyttää pientaajuiset komponentit, suhteellisesti suuremmilla suurtaajuisilla termeillä on taipumus peittää tulos. Tästä on esimerkkinä kuvat kp.39 (b) ja kp.39 (c). Luettavuuden parantuminen ei ole kovin merkitsevää siirryttäessä kuvasta kp.39 (b) kuvaan kp.39 (c). Ilmiön kompensoimiseksi kuvaa usein jälkikäsitellään muokkaamalla harmaatasoja. Histogrammin tasaus on tähän tarkoitukseen sopiva, sillä se parantaa kontrastia. Kuvassa kp.39 (d) tulos on saatu suurtaajuuspainotuksella ja histogrammin tasauksella.

### HOMOMORFINEN SUODATUS

Luvussa Digitaalisen kuvan perusteet käsiteltyä valaisu heijastusmallia voidaan käyttää perustana taajuustason menetelmässä, jossa kuvan luettavuutta parannetaan samanaikaisella kirkkaustason kompressiolla ja kontrastin parantamisella. Kuten aikaisemmin todettiin, kuva  $f(x, y)$  voidaan mallintaa valaisu-  $i(x, y)$  ja heijastuskomponentilla  $r(x, y)$ .

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (\text{kp.46})$$

Yhtälöä (kp.46) ei voi käyttää suoraan valaistuksen ja heijastuksen taajuuskomponenttien operointiin sillä kahden funktion tulon Fourier-muunnos ei ole separoituva. Toisin sanoen

$$F\{f(x, y)\} \neq F\{i(x, y)\}F\{r(x, y)\}$$

Oletetaan, että sensijaan määritellään

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y) \quad (\text{kp.47})$$

jolloin

$$\begin{aligned} F\{z(x, y)\} &= F\{\ln f(x, y)\} \\ &= F\{\ln i(x, y)\} + F\{\ln r(x, y)\} \end{aligned} \quad (\text{kp.48})$$

tai

$$Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v) \quad (\text{kp.49})$$

jossa  $I(u, v)$  ja  $R(u, v)$  ovat funktioitten  $\ln i(x, y)$  ja  $\ln r(x, y)$  Fourier-muunnokset. Jos  $Z(u, v)$  prosessoidaan suodatinfunktiolla  $H(u, v)$ , silloin yhtälön kp.4 mukaan saadaan

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v) \end{aligned} \quad (\text{kp.50})$$

jossa  $S(u, v)$  on prosessoidun kuvan Fourier-muunnos. Tulos spatiaalitasossa on

$$\begin{aligned} s(x, y) &= F^{-1}\{S(u, v)\} \\ &= F^{-1}\{H(u, v)I(u, v)\} + F^{-1}\{H(u, v)R(u, v)\} \end{aligned} \quad (\text{kp.51})$$

sijoittamalla

$$i'(x, y) = F^{-1}\{H(u, v)I(u, v)\} \quad (\text{kp.52})$$

ja

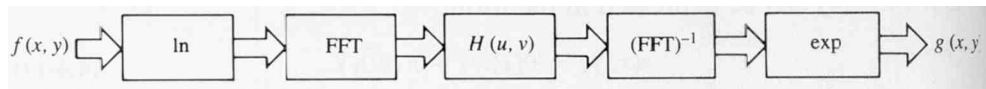
$$r'(x, y) = F^{-1}\{H(u, v)R(u, v)\} \quad (\text{kp.53})$$

Yhtälö (kp.51) voidaan kirjoittaa muotoon

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y) \quad (\text{kp.54})$$

Lopuksi, koska  $z(x, y)$  oli saatu ottamalla alkuperäisestä kuvasta  $f(x, y)$  logaritmi, käänteinen operaatio johtaa haluttuun muokattuun kuvaan  $g(x, y)$ .

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \exp[s(x, y)] \\ &= \exp[i'(x, y)] \times \exp[r'(x, y)] \\ &= i_0(x, y)r_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{kp.55})$$



Kuva kp.40 Homorfinen suodatin kuvankäsittelyyn

jossa

$$i_0(x, y) = \exp[i'(x, y)] \quad (\text{kp.56})$$

ja

$$r_0(x, y) = \exp[r'(x, y)] \quad (\text{kp.57})$$

ovat ulostulokuvan valaisu- ja heijastuskomponentit.

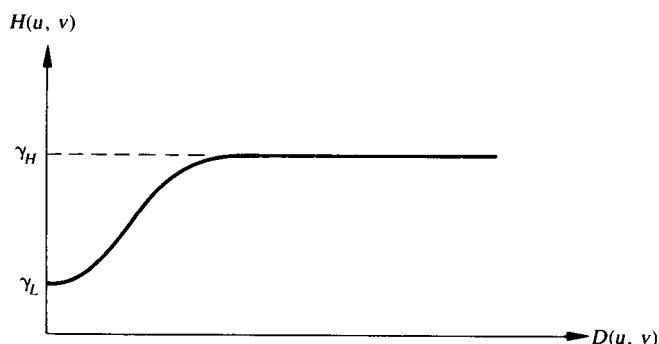
Edelläkuvatun mukainen kuvan käsittelykonsepti on luvassa kp.40. Menetelmä perustuu erikoistapaukseen ns. homomorfisista järjestelmistä. Tässä erikoistapauksessa avainmenetelmä on valaisu- ja heijastuskomponenttien erottaminen, joka tapahtuu yhtälöä (kp.49) käyttäen. Homomorfista suodatinfunktiota  $H(u, v)$  voidaan käyttää tämän jälkeen kumpaankin komponenttiin erikseen yhtälön (kp.50) mukaisesti.

Kuvan valaisukomponenttia luonnehtii yleensä pienet spatiaaliset vaihtelut. Sensijaan heijastuskomponentilla on taipumus vaihdella äkillisesti varsinkin erilaisten kohteiden rajoilla. Näiden ominaisuuksien perusteella valaisukomponentin logaritmin Fourier-muunnos sisältää pieniä taajuuksia ja heijastuskomponentin logaritmin muunnos suuria taajuuksia. Vaikka tämä on karkea yleistys, sitä voidaan pitää etuna kuvan muokkaamisessa.

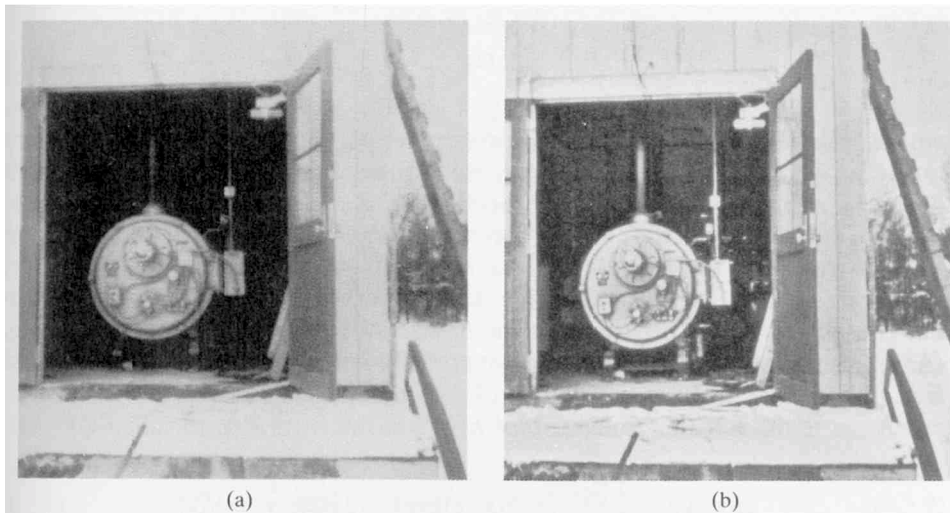
Homomorfisen suodattimen hyvää säädettävyyttä voidaan hyödyntää valaisu- ja heijastuskomponentteihin. Tämä vaatii sellaisen suodattimen siirtofunktion  $H(u, v)$ , joka vaikuttaa eri tavoin pieniin ja suuriin taajuuksiin. Kuvassa kp.41 on leikkauskuva sellaisesta suodattimesta. Siirtofunktion täydellinen spesifikaatio saadaan pyöräyttämällä leikkauskuva 360° vertikaaliakselin ympäri. Jos parametrit  $\gamma_L$  ja  $\gamma_H$  valitaan niin, että  $\gamma_L < 1$  ja  $\gamma_H > 1$ , silloin kuvan kp.41 mukainen suodatinfunktio vaimentaa pieniä taajuuksia ja vahvistaa suuria taajuuksia. Tuloksena saadaan samanaikaisesti dynamiikka-alueen kompressio ja kontrastin lisääntyminen.

### Esimerkki

Kuvassa kp.42 on tyypillinen esimerkki tuloksesta, joka voidaan saavuttaa kuvan kp.41 homomorfisella suodatinfunktiolla. Alkuperäisessä kuvassa kp.42 (a) rakennuksen sisäosat ovat hämärtyneet kirkkaan ulkovalaistuksen takia. Kuvassa kp.42 (b) on tulos, kun kuvaa on käsitelty homomorfisella suodattimella, jonka siirtofunktion parametrit ovat  $\gamma_L = 0,5$  ja



Kuva kp.41 Leikkauskuva ympyräsymmetrisestä homomorfisesta suodatinfunktiosta  $H(u, v)$ .  $D(u, v)$  on etäisyys origosta.



Kuva kp.42 Alkuperäinen kuva (a) ja homomorfisella suodattimella käsitelty kuva. Menetelmällä on saavutettu samanaikaisesti dynamiikka-alueen kompressio ja kontrastin paraneminen.

$\gamma_H = 2,0$ . Kirkkauden dynamiikka-alueen pieneneminen yhdessä kontrastin lisääntymisen kanssa on tuonut näkyviin sisätilan yksityiskohtia ja tasannut seinän harmaatasoja.

## SPATIAALISEN MASKIN MUODOSTAMINEN TAAJUUSTASON VAATIMUKSISTA

Kuten kappaleessa Taustaa todettiin, spatiaalisen maskin käytön etuna kuvankäsittelyssä on yksinkertaisuus ja nopeus. Seuraavaksi kehitetään menetelmä, jolla muodostetaan spatiaalinen maski, joka on likiarvo taajuustason suodattimesta pienimmän neliövirheen mielessä.

Suodatusprosessi taajuustasossa perustuu aikaisemmin esiteltyyn yhtälöön

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (\text{kp.58})$$

jossa  $F(u, v)$  on alkuperäisen kuvan Fourier-muunnos ja  $G(u, v)$  on käsitellyn kuvan Fourier-muunnos.  $H(u, v)$  on suodattimen siirtofunktio. Konvoluutioteoreeman mukaa yhtälö (kp.58) voidaan toteuttaa spatiaalitasossa yhtälöllä

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(x-i, y-k) f(i, k) \quad (\text{kp.59})$$

jossa  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Merkintöjen yksinkertaisuuden vuoksi käytetään neliökuvaa. Lisäksi oletetaan, että kaikki funktiot ovat oikein laajennetut koskien konvoluutiota.

Yhtälössä (kp.59)  $h$  on spatiaalitasoon suodatinfunktio, mikä on  $H(u, v)$ :n käänteinen Fourier-muunnos.  $f$  on alkuperäinen kuva ja  $g$  on käsitelty kuva. Termistä  $h$  käytetään yleisesti nimitystä **spatiaalinen konvoluutiomaski**. Jos maskin koko on  $N \times N$ , yhtälön (kp.59) tuottama tulos on sama kuin  $G(u, v)$ :n käänteinen Fourier-muunnos yhtälössä (kp.58).

Kun  $H$  on  $h$ :n Fourier-muunnos, yhtälöstä (km.22) seuraa



$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} h(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)/N} \quad (\text{kp.60})$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Oletetaan kuitenkin, että  $h(x, y)$  on pakotettu nolleen, kun  $x > n$  ja  $y > n$  ja  $n < N$ . Tämä pakote muodostaa  $n \times n$  konvoluutiomaskin  $\hat{h}$ , jonka Fourier-muunnos on

$$\hat{H}(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{h}(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)/N} \quad (\text{kp.61})$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Seuraava tehtävä on muodostaa sellaiset  $h(x, y)$ :n kertoimet, että virheen neliö

$$e^2 = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} |\hat{H}(u, v) - H(u, v)|^2 \quad (\text{kp.62})$$

minimoituu. Yhtälö (kp.61) voidaan kirjoittaa matriisin muotoon

$$\hat{H} = C\hat{h} \quad (\text{kp.63})$$

jossa  $\hat{H}$  on pystyvektori, jonka koko on  $H^2$  ja joka sisältää  $\hat{H}(u, v)$ :n elementit jossakin järjestyksessä.  $\hat{h}$  on pystyvektori, jonka koko on  $n^2$  ja joka sisältää  $\hat{h}(x, y)$ :n elementit jossakin järjestyksessä.  $C$  on  $N^2 \times n^2$  eksponenttiterminen matriisi, jonka elementtien paikat määräytyvät  $\hat{H}$ :n ja  $\hat{h}$ :n järjestyksistä.  $\hat{H}(i)$ , jossa  $i = 0, 1, 2, \dots, N^2 - 1$ , voidaan muodostaa  $\hat{H}$ :sta seuraavalla menetelmällä

$$\hat{H}(u, v) \Rightarrow \hat{H}(i) \quad (\text{kp.64})$$

jossa  $i = uN + v$  ja  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Menetelmässä  $\hat{H}(u, v)$ :n ensimmäinen rivi muodostaa  $\hat{H}(i)$ :n  $N$  ensimmäistä elementtiä ja  $\hat{H}(u, v)$ :n toinen rivi  $\hat{H}(i)$ :n  $N$  seuraavaa elementtiä. Näin jatketaan kunnes kaikki rivit on siirretty  $\hat{H}(i)$ :hin.  $\hat{h}$ :n elementit, jota merkitään  $\hat{h}(k)$ , jossa  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , muodostetaan vastaavalla menetelmällä.

$$\hat{h}(u, v) \Rightarrow \hat{h}(k) \quad (\text{kp.65})$$

jossa  $k = xn + y$  ja  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Lopuksi muodostetaan  $C$ :n vastaavat elementit, joita merkitään  $C(i, k)$ , muodostetaan eksponenttitermeistä

$$\frac{1}{N} e^{-j2\pi(ux+vy)/N} \Rightarrow C(i, k) \quad (\text{kp.66})$$

jossa  $i = uN + v$  ja  $k = xn + y$  kun  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ja  $x, y = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Käyttämällä matriisimerkintöjä, yhtälö (kp.62) tulee muotoon

$$e^2 = (\hat{H} - H) * (\hat{H} - H) = \|\hat{H} - H\|^2 = \|C\hat{h} - \hat{H}\|^2 \quad (\text{kp.67})$$



jossa  $*$  tarkoittaa kompleksikonjugaatti transpoosia,  $\|\cdot\|$  on kompleksinen Euklidinen normi ja  $H$  on  $H(u, v)$ :stä aikaisemmin kuvatulla tavalla muodostettu vektori. Ottamalla osittaisderivaatta ja merkitsemällä se nolllaksi, saadaan minimi  $e^2$  suhteessa  $\hat{h}$ :n.

$$\frac{\partial e^2}{\partial \hat{h}} = 2C^*(C\hat{h} - H) = 0 \quad (\text{kp.68})$$

tai

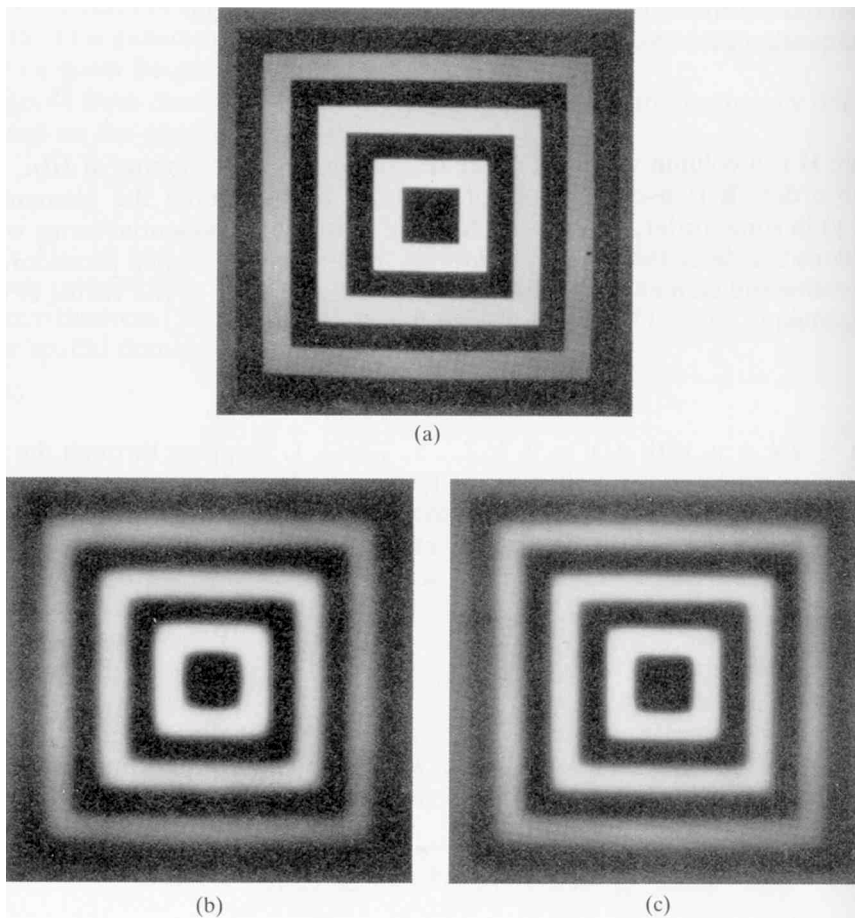
$$\begin{aligned} \hat{h} &= (C^*C)^{-1}C^*H \\ &= C^\#H \end{aligned} \quad (\text{kp.69})$$

jossa matriisia  $C^\# = (C^*C)^{-1}C^*$  sanotaan usein Moore-Penrose yleistetty käännös.

Yhtälö (kp.69) johtaa haluttuun minimivirhe kertoimiseen  $n \times n$  konvoluutiomaskiin  $\hat{h}(x, y)$  lähdetessä taajuustason  $N \times N$  suodatinfunktiosta  $H(u, v)$ . Yleisesti  $\hat{h}(x, y)$ :n termit ovat kompleksisia. Kuitenkin jos taajuustason suodatinfunktio on reaalinen ja symmetrinen niin myös  $\hat{h}(x, y)$  on reaalinen ja symmetrinen.

### Esimerkki

Esitetyn menetelmän valottamiseksi tarkastellaan kuvassa kp.43 olevia testikuvioita. Kuvassa kp.43 (a) alkuperäiseen kuvioon on sovellettu kuvassa kp.43 (b) Butterworth alipäästösuodatinta. Kuvassa kp.43 (c) on tulos sovellettaessa  $9 \times 9$  konvoluutiomaskia



Kuva kp.43 Alkuperäinen kuva (a) pehmennetty kuva, joka on saatu Butterworth suodattimella taajuustasossa (b) ja spatiaalitasossa  $9 \times 9$  konvoluutiomaskilla, joka kehitetty yhtälön (kp.69) mukaisesti, suodattamalla saatu kuva (c).

alkuperäiseen kuvaan. Kuvan kp.43 (c) tulos on vähemmän pehmentynyt verrattuna tulokseen, joka on saatu täydellisellä suodattimella taajuustasossa. Tulos on odotettu, sillä spatiaalitason prosessi, jossa  $n < N$ , on vain likiarvo pienimmän neliövirheen mielessä taajuustason suodattimesta.

## VÄRIKUVIEN PROSESSOINTI

Värien käyttöä kuvien prosessoinnissa on perusteltu kahdella tekijällä. Ensiksi automaattisessa kuvan analysoinnissa väri on voimakas kuvaaja, mikä usein yksinkertaistaa kohteen tunnistusta. Toiseksi visuaalisesti suoritettavassa kuvan analysoinnissa ihmisen näkökyky pystyy erottamaan tuhansia värien sävyjä ja intensiteettejä. Jos tätä verrataan pariin tusinaan harmaatasoon, jotka silmä pystyy erottamaan, ero on merkittävä.

Värikuvien käsittely on jaettu perinteisesti täysväri- ja pseudoväriprosessointiin. Ensimmäisessä tapauksessa kuva on tyypillisesti saatu täysvärisensorista kuten TV-kamerasta tai väriskannerista. Toisessa tapauksessa harmaatasokuvan eri harmaatasot väritetään eri väreillä. Useimmat värikuvaprosessit aina viime vuosikymmeniin asti ovat olleet pseudoväritasoisia. Merkittävää kehittymistä tapahtui 1980-luvulla, jolloin värisensorien ja prosessointilaitteistojen hinnat laskivat voimakkaasti mahdollistaen värikuvien käsittelyn laajemmassa mitassa. Tämän seurauksena värikuvien käsittely on tullut osaksi kuvankäsittelyn arkipäivää.

## VÄRIEN PERUSTEET

Vaikka värien käsittelyä ihmisaivoissa ei täysin tunneta, niin värien fysikaalinen luonne voidaan esittää formaalissa muodossa, jota tukevat teoreettiset tulokset ja käytännön kokeet.

Isaac Newton huomasi 1666, että Auringon valon kulkiessa lasiprisman läpi, se oli hajonnut väreihin. Värit muodostivat jatkuvan spektrin alkaen violetista ja päätyen punaiseen. Tämä spektri voidaan jakaa kuuteen pääalueeseen, jotka ovat violetti, sininen, vihreä, keltainen, oranssi ja punainen. Rajat eri alueiden välillä eivät ole tarkkoja vaan muutos väristä toiseen tapahtuu vähitellen.

Perimmältään värit, jotka ihminen kohteesta havaitsee, riippuvat kohteen valon heijastusominaisuuksista. Näkyvän valon alue koko sähkömagneettisen säteilyn spektristä on varsin kapea. Kohde, joka heijastaa suhteellisen tasaisesti kaikki spektrin komponentit, nähdään valkoisena. Toisaalta kohde, joka heijastaa vain rajoitetun osan spektriä, nähdään värillisenä. Esimerkiksi vihreä kohde heijastaa taajuuksia, joiden aallonpituus on välillä 500 ... 570 nm, ja absorboi muut osat spektriä.

Valon ominaisuuksien määrittely keskittyy väreihin. Akromaattisen valon ainoa attribuutti on intensiteetti. Esimerkki akromaattisesta valosta on musta-valkoinen televisio. Termi harmaataso viittaa valon intensiteettiä kuvaavaan skalaariin, joka alkaa mustasta, käy harmaan kautta valkoiseen.

Kromaattinen valo kattaa sähkömagneettisen spektrin n. 400:sta 700 nm:iin. Kromaattisen valon lähdettä kuvataan yleensä suureilla radianssi, luminanssi ja kirkkaus. Radianssi on lähteen säteilemä teho ja sitä mitataan wateilla, W. Luminanssi on havainnoijan kokema valoteho ja sitä mitataan lumeneina, lm. Esimerkiksi pääasiassa infrapuna-alueella säteilevän

lähteen säteilyteho voi olla hyvinkin suuri mutta havainnoija tuskin näkee sitä. Toisin sanoen lähteen luminanssi on miltei nolla. Lopuksi kirkkaus on subjektiivinen mitta, jota on käytännössä hyvin vaikea mitata. Termi pitää sisällään akromaattisen intensiteetin ja on eräs avainkäsite kuvattaessa värien havainnointia.

Ihmissilmän rakenteen perusteella kaikki värit nähdään kolmen ns. perusvärin, punaisen, vihreän ja sinisen erilaisina yhdistelminä. Standardointitarkoituksissa CIE määritteli 1931 näiden värien aallonpituudet, jotka ovat sininen = 435,8 nm, vihreä = 546,1 nm ja punainen = 700 nm. On kuitenkin huomattava, että kaikki värit koostuvat joukosta aallonpituuksia eikä kaikkia värejä voida saavuttaa vaihtelematta myös perusvärien aallonpituuksia. Tämä havainto on tärkeä, sillä termi perusväri on usein ymmärretty väärin niin, että vaihtelemalla niiden keskinäistä intensiteettiä voitaisiin saada aikaan kaikki värit.

Perusvärejä voidaan täydentää toisioväreillä magenta (punainen + sininen), syan (vihreä + sininen) ja keltainen (punainen + vihreä). Sekoittamalla kaikki perusvärit tai toisioväri sen vastakkaisella perusvärillä sopivissa suhteissa saadaan valkoinen. Ero valon perusvärien ja pigmenttien perusvärien välillä on tärkeä. Myöhemmin perusvärit määritellään sen perusteella miten ne heijastuvat tai absorboituvat. Siksi pigmenttien perusvärit ovat magenta, syan ja keltainen ja toisiovärit vastaavasti punainen, vihreä ja sininen. Oikea kombinaatio kolmea pigmentin perusväriä tai toisioväri vastakkaisen perusvärin kanssa saa aikaan mustan.

Väritelevisio on esimerkki valon ns. yhteenlaskevasta luonteesta. Televisiovastaanottimen kuvapinta koostuu joukosta kuva-alkioita, jotka muodostuvat punaisesta, vihreästä ja sinisestä loisteaineesta. Kutakin väripistettä pommitetaan elektronisuihkulla, jonka intensiteettiä vaihdellaan kuvasisällön ja kohteen värin perusteella. Seurauksena myös vastaava valon intensiteetti vaihtelee. Yhden pikselin kokonaisväri riippuu osavärien intensiteeteistä. Värit lasketaan yhteen. Näin voidaan tuottaa täysvärikuva. Sekunnissa tuotetaan 25 peräkkäistä kokokuvaa ja ihminen kokee illuusion jatkuvasta kuvasta.

Eri värien toisistaan erottamiseen käytetään yleensä parametreja kirkkaus, värisävy ja kylläisyys. Kuten aikaisemmin todettiin niin kirkkaus vastaa valon intensiteettiä. Värisävy kuvaa laajan spektrin dominoivaa aallonpituutta. Värisävy edustaa havainnoitsijan kokemaa hallitsevaa väriä. Kun kohteen sanotaan olevan punaisen, oranssin tai keltaisen, tarkoitetaan sen värisävyä. Kylläisyydellä tarkoitetaan värisävyn suhteellista osuutta verrattuna valkoiseen valoon. Puhtaat spektrin värit ovat täysin kylläisiä. Sellaiset värit kuin vaaleanpunainen (punainen ja valkoinen) tai laventeli (violetti ja valkoinen) ovat vähemmän kylläisiä. Kylläisyys riippuu sekoittuneen valkoisen valon määrästä.

Värisävyä ja kylläisyyttä yhdessä sanotaan kromaattisuudeksi, jolloin väri voidaan määritellä kirkkauden ja kromaattisuuden avulla. Punaisen, vihreän ja sinisen määrää, joka tarvitaan tiettyyn värisävyyteen, sanotaan kolmiherätearvoiksi (tristimulus) ja niitä merkitään X:llä, Y:llä ja Z:lla. Väri voidaan tällöin määritellä sen **kolmivärikertoimilla**

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (\text{kp.70})$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (\text{kp.71})$$

ja

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} \quad (\text{kp.72})$$

Näistä yhtälöistä saadaan

$$x + y + z = 1 \quad (\text{kp.73})$$

Mille tahansa näkyvän valon spektrin aallonpituudella tarvittavat kertoimet voidaan määrätä käyristä tai taulukoista, jotka on johdettu Walshin ja Kiverin laaja-alaisista kokeista. Toinen lähestymistapa värien määräämiseksi on kromaattinen kaavio, joka näyttää värit  $x:n$  (punainen) ja  $y:n$  (vihreä) yhdistelmänä. Minkä tahansa  $x:n$  ja  $y:n$  yhdistelmän perusteella voidaan määrittellä  $z$  yhtälön (kp.73) mukaan. Esimerkiksi oppikirjan värikuvassa table IV on merkitty piste "green", jonka koordinaatit ovat  $n. y = 0.62$  ja  $x = 0,25$ . Tällöin sinisen arvo on  $z = 1 - y - x = 1 - 0,62 - 0,25 = 0,13$ .

Samassa taulukossa eri spektrin värit violetista 380 nm punaiseen 780 nm ovat kromaattisen kaavion reunalla. Nämä ovat puhtaat spektrin värit. Kaikki muut pisteet kaaviossa edustavat jotakin spektrin värien yhdistelmää. Taulussa IV oleva tasaenergiapisteessä kaikkien perusvärien komponenttien arvot ovat yhtäsuuret ja se edustaa CIE standardin valkoista valoa. Jokaisen kromaattisen kaavion rajalla oleva väri on täysin kylläinen. Poistuttaessa rajalta ja lähestyttäessä kaavion keskustaa kylläisyys vähenee ja tasaenergiapisteessä kylläisyys on nolla.

Kromaattisuuskaavio on käyttökelpoinen värien sekoittamiseen. Suora viiva, mikä yhdistää kaksi kaavion pistettä, määrittelee kaikki väri vaihtoehdot, jotka voidaan saavuttaa vaihtelemalla näiden kahden värin määrää additiivisesti. Esimerkiksi taulussa IV on merkitty pisteet "green" ja "red". Näillä kahdella värillä voidaan muodostaa värit, jotka sijaisevat niitä yhdistävällä suoralla. Samoin piirtämällä suora tasaenergiapisteestä kaavion reunalle, saadaan kaikki tämän spektrin värin sävyt.

Tämän menetelmän laajentaminen kolmeen väriin on suoraviivaista. Niiden värien määräämiseksi, jotka voidaan saada aikaan joillakin annetuilla kolmella värillä, yhdistetään nämä kolme väripistettä. Tuloksena saadaan kolmio, jonka sisälle jäävät värit voidaan saada aikaan annetuilla kolmella värillä. Kolmen kiinteän värin muodostaman kolmion ulkopuolelle jää aina osa kromaattisuuskaaviota. Tämä merkitsee sitä, että kaikkia värejä ei ole mahdollista saada aikaan kolmella kiinteällä värillä.

## VÄRIMALLIT

Värimallien tarkoituksena on helpottaa jonkin standardin värien määrittelyä yleisesti hyväksytyllä tavalla. Värimalli on 3-ulotteisen koordinaattisysteemin ja aliavaruuden spesifikaatio, jossa jokainen väri on esitetty yksittäisellä pisteellä.

Useimmat nykyiset värimallit on tarkoitettu joko laitteistoille (kuten monitoreille tai kirjoittimille) tai värien muokkaamiseen (värigrafiikka). Käytännössä useimmat laitteisto-orientoituneet värimallit ovat RGB-mallia värimonitoreille ja videokameroille, CMY-malli värikirjoittimille ja YIQ-malli väri TV-lähetysille. Jälkimmäisessä menetelmässä  $Y$  vastaa luminanssia ja  $I$  ja  $Q$  ovat kaksi krominanssikomponenttia. Värikuvien käsittelyssä useimmin

käytetyt mallit ovat HSI (hue, saturation, intensity) malli ja HSV (hue, saturation, value) malli.

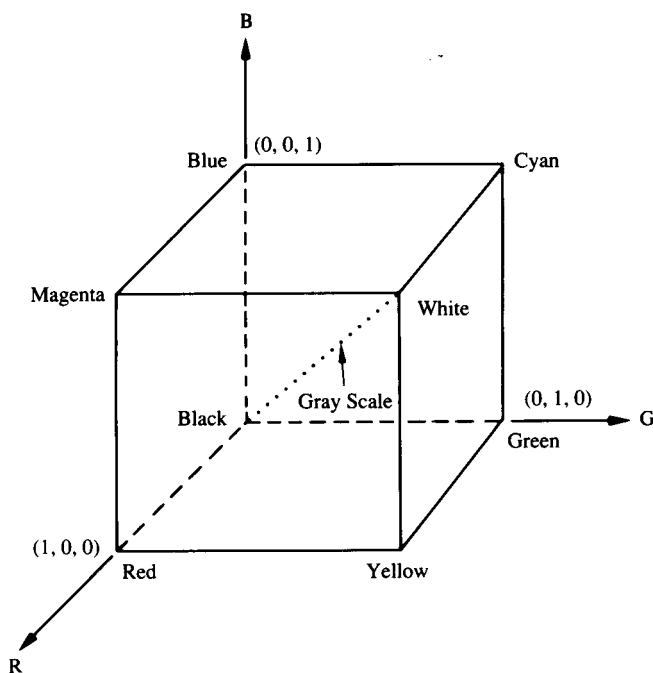
Kuvien käsittelyyn useimmin käytetyt värimallit ovat RGB, YIQ ja HIS. Edellä olevien mallien lisäksi käsitellään CMY malli, joka on tarkoitettu kirjoittimiin eikä niinkään kuvien käsittelyyn. CMY mallilla on kuitenkin merkitystä kuvien tulostuksessa.

### RGB värimalli

RGB värimallissa jokainen väri esitetään perusspektrikomponenttien punainen, vihreä ja sininen yhdistelminä. Tämä malli perustuu Karteesiseen koordinaatistoon. Kiinnostava väri aliavaruus on kuutio (kuva kp.44), jossa RGB arvot ovat kolmessa nurkassa. Toisissa kolmessa nurkassa ovat värit syani, magenta ja keltainen. Musta on origossa ja valkoinen kaukaisimmassa nurkassa origosta. Tässä mallissa harmaa-asteikko on suoralla, joka yhdistää mustan ja valkoisen. Värit sijaitsevat kuution pinnoilla tai kuution sisällä. Lisäksi oletetaan, että värit on normalisoitu, jolloin kuutio on yksikkökuutio. Kaikki  $R:n$ ,  $G:n$  ja  $B:n$  arvot ovat välillä  $[0, 1]$ .

Kuvat RGB värimallista muodostuvat kolmesta itsenäisestä väritasosta, yksi kullekin perusvärille. Lopullinen kuva muodostuu näiden osakuvien summana. RGB mallin käyttö värikuvien prosessointiin on perusteltua, kun kuvat luonnostaan on esitetty kolmella väritasolla. Toisaalta useimmat värikamerat käyttävät RGB formaattia, mikä yksinäänkin tekee tästä mallista tärkeän kuvankäsittelyssä.

Eräs parhaista esimerkeistä RGB mallin käyttökelpoisuudesta on sateliittien monitaajuuskuvien prosessointi. Kuvat on otettu käyttäen useampaa eri taajuuksilla toimivaa sensoria. Esimerkiksi LANDSAT kuvakehys koostuu neljästä digitaalisesta osakuvasta. Jokainen osakuva on samasta kohteesta mutta otettu eri spektrin alueella tai ikkunalla. Kaksi ikkunaa on näkyvän valon alueella vastaten karkeasti vihreää ja punaista. Kaksi muuta



Kuva kp.44 RGB värikuutio. Päälävistäjällä ovat harmaatasot ja valkoinen on pisteessä  $(1, 1, 1)$

ikkunaa on spektrin infrapuna-alueella. Siten kullakin kuvarasolla on fyysinen merkitys. RGB mallin käyttö on perusteltua tutkittaessa ja prosessoitaessa kuvia RGB monitorilla. Toinen mahdollisuus mallin käyttöön perustuu kuvan segmentointiin spektrikomponentin perusteella.

Oletetaan, että ongelmana on värikuvan parantaminen tapauksessa, jossa ihmiskasvot ovat osittain varjossa. Kuten aikaisemmin on todettu, niin histogrammin tasaus on ideaalinen työkalu tämäntäpaaisessa ongelmassa. Koska nyt on kolme erillistä kuvaa ja histogrammin tasaus koskee vain intensiteetti-arvoja, ilmeinen ratkaisu on soveltaa histogrammin tasausta itsenäisesti kuhunkin kuvaan erikseen. Osa varjossa olevasta kuvasta kaikella todennäköisyydellä paranee. Kuitenkin eri kuvatasojen intensiteetit eroavat toisistaan, jonka seurauksena suhteelliset intensiteetit niiden välillä muuttuvat. Kokonaisuudessaan kuvan ominaisuudet muuttuu niin, että esimerkiksi ihon väri ei ole luonnollinen. Jotkut seuraavista värimalleista soveltuvat tämäntäpaaisiin ongelmiin paremmin kuin RGB malli.

### CMY värimalli

Kuten aikaisemmin todettiin, niin syani, magenta ja keltainen ovat valon toisiovärit tai pigmentin perusvärit. Esimerkiksi valkoisella valolla valaistu syani pigmentillä päällystetty pinta ei heijasta punaista valoa. Toisin sanoen syani erottaa punaisen valon heijastuneesta valkoisesta valosta, joka itse sisältää saman määrän punaista, vihreää ja sinistä valoa.

Useimmat laitteet, jotka tulostavat värjättyjä pigmenttejä paperille tarvitsevat CMY muotoisen datan tai ne suorittavat itse RGB - CMY muunnoksen. Muunnos on yksinkertainen operaatio.

$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{kp.74})$$

jossa jälleen edellytetään, että kaikki väriarvot ovat normalisoituja välille  $[0, 1]$ . Yhtälö (kp.74) osoittaa, että puhtaalla syanilla pinnoitetusta pinnasta heijastunut valo ei sisällä punaista, puhdas magenta ei heijasta vihreää eikä puhdas keltainen heijasta sinistä. Yhtälöstä (kp.74) voidaan edelleen johtaa päinvastainen muunnos vähentämällä ykkösestä erilliset CMY arvot. Kuten aikaisemmin todettiin, niin tämä värimalli on käytössä tulostettaessa värikuvia, niin käänteisellä muunnoksella ei ole käytännön merkitystä.

### YIQ värimalli

YIQ värimalli on käytössä kaupallisissa väritelevisio lähetyksissä. YIQ mallia käytetään lähetyksen tehokkuuden ja musta-valko standardin yhteensopivuuden takia. Mallin Y komponentti sisältää kaiken videoinformaation, mikä tarvitaan musta-valkoiseen televisioon. RGB - YIQ muunnos määritellään

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,596 & -0,275 & -0,321 \\ 0,212 & -0,523 & 0,311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{kp.75})$$

RGB arvojen laskemiseksi YIQ arvoista käytetään yksinkertaisesti käänteistä matriisioperaatiota.

YIQ malli kehitettiin aikanaan ottamalla huomioon inhimillisen visuaalisen järjestelmän suurempi herkkyys luminanssin muutoksille kuin värisävyille tai värikylläisyydelle. Siksi YIQ malli käyttää enemmän kaistaa Y komponentille kuin I tai Q komponenteille.

YIQ mallin periaatteellinen etu on, että siinä luminanssi (Y) ja krominanssi (I ja Q) informaatiot ovat erotetut Tästä erotuksesta seuraa, että kuvan luminanssikomponenttia voidaan prosessoida sen vaikuttamatta värisisältöön ja toisaalta luminanssi on suhteessa pikselin kokonaiskirkkauteen. Esimerkiksi aikaisemmin mainittu RGB kuva, jossa osa kasvoja oli varjossa, voidaan korjata YIQ mallissa käyttämällä histogrammin tasausta vain Y komponenttiin. Tässä prosessissa suhteelliset värit eivät ole muuttuneet.

### HSI värimalli

Värisävy on värin attribuutti, joka määrittelee puhtaan värin (puhdas keltainen, oranssi tai punainen) ja kylläisyys määrittelee paljonko puhtaaseen väriin on sekoittunut valkoista. HSI malli saa kiittä käyttökelpoisuudestaan kahta asiaa. Ensiksi intensiteettikomponentti  $I$  on erotettu kuvan väri-informaatiosta. Toiseksi värisävy ja kylläisyyden mallit ovat lähellä sitä, miten ihminen havainnoi värejä. Nämä ominaisuudet tekevät HSI mallista ideaalisen työkalun kehittää kuvankäsittelyn algoritmeja, jotka perustuvat johonkin väreille herkkään ihmisen visuaalisen järjestelmän ominaisuuteen.

Esimerkkeinä HSI mallin käyttökelpoisuudesta ovat alkaen hedelmien ja vihannesten kypsyyden automaattisesta tunnistamisesta värikkäiden tuotteiden laadun tarkkailuun mallien avulla. Näissä ja muissa samantapaisissa tehtävissä avainominaisuutena on perustaa järjestelmän toiminta sentyyppisiin algoritmeihin joita ihminen itse käyttää näihin tehtäviin.

Käännösyhtälöt RGB mallista HSI malliin ja takaisin ovat oleellisesti monimutkaisempia kuin aikaisemmissa malleissa. Sen sijaan, että lähdettäisiin näistä yhtälöistä, ne johdetaan syvemmän ymmärtämyksen saamiseksi.

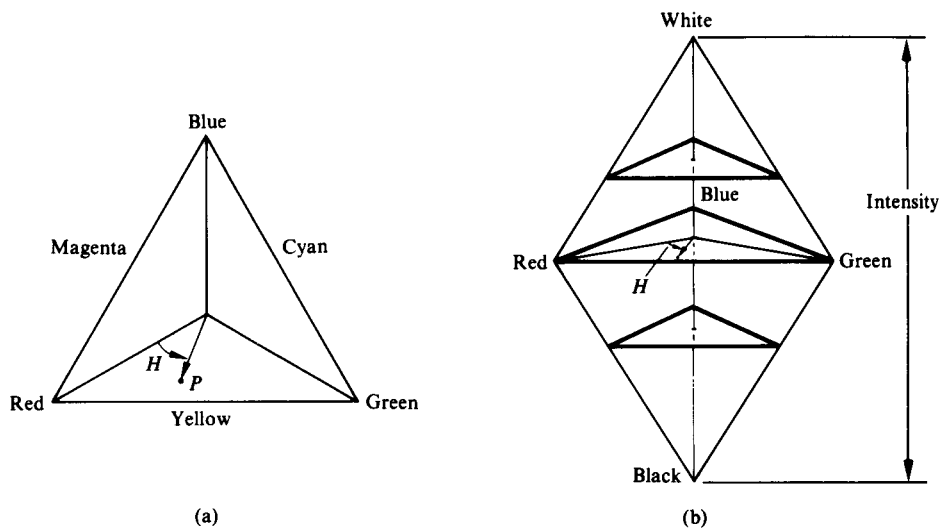
### Muunnos RGB mallista HSI malliin

RGB malli on määritelty suhteessa yksikkökuutioon. HSI mallissa värisävy ja kylläisyys on määritelty suhteessa värikolmioon (kova kp.45). Kuvassa kp.45 (a) on esitetty, että väripisteen  $P$  värisävy  $H$  on kulma punaisen akselin ja vektorin  $P$  välillä. Kun  $H = 0$  niin värisävy on punainen ja kun  $H$  on  $60^\circ$  sävy on keltainen jne. Väripisteen  $P$  värikylläisyys  $S$  on määrä, jonka väri on valkoisen kyllästävä ja se on suhteellinen pisteen etäisyyteen kolmion keskipisteestä. Mitä kauempana piste  $P$  on kolmion keskipisteestä sitä kylläisempi se on.

HSI mallissa intensiteetti mitataan suoralla, joka on kohtisuoraan vasten kolmion tasoa ja kulkee sen keskipisteen kautta. Intensiteetit, jotka sijaitsevat kolmion alapuolella ovat tummasta mustaan. Päinvastaisessa tapauksessa intensiteetit ovat vaaleasta valkoiseen.

Yhdistämällä värisävy, kylläisyys ja intensiteetti 3-ulotteiseksi tilaksi, saadaan kolmisivuinen pyramidin kaltainen rakenne (kuva kp.45 (b)). Mikä tahansa piste tämän rakenteen pinnalla on täysin kylläinen väri. Värisävy määritellään kulmana suhteessa punaiseen akseliin ja sen





Kuva kp.45 HSI värikolmio (a) ja HSI väriavaruus (b)

intensiteetti suorakulmaisena etäisyytenä mustaan. Sama koskee pisteitä, jotka ovat tilan sisällä. Ainoa ero on, että värisävyjen kylläisyys vähenee lähestyttäessä kolion keskipistettä.

HSI mallissa värit on määritelty suhteessa normalisoituihin punaisen, vihreän ja sinisen arvoihin. Nämä ovat RGB perusväreinä

$$r = \frac{R}{R + G + B} \quad (\text{kp.76})$$

$$g = \frac{G}{R + G + B} \quad (\text{kp.77})$$

ja

$$b = \frac{B}{R + G + B} \quad (\text{kp.78})$$

jossa  $R$ ,  $G$  ja  $B$  ovat normalisoidut välille  $[0, 1]$ . Yhtälöiden (kp.76) ... (kp.78) mukaan myös  $r$ ,  $g$  ja  $b$  ovat normalisoidut välille  $[0, 1]$  ja että

$$r + g + b = 1 \quad (\text{kp.79})$$

Koska  $R$ ,  $G$  ja  $B$  voivat samanaikaisesti olla 1, normalisoitujen muuttujien on täytettävä yhtälö (kp.79). Yhtälö (kp.79) on HSI mallin värikolmion yhtälö.

Mille tahansa  $R$ ,  $G$  ja  $B$  värikomponentille, joka on normalisoitu välille  $[0, 1]$ , intensiteettikomponentti  $I$  HSI mallissa on määritelty

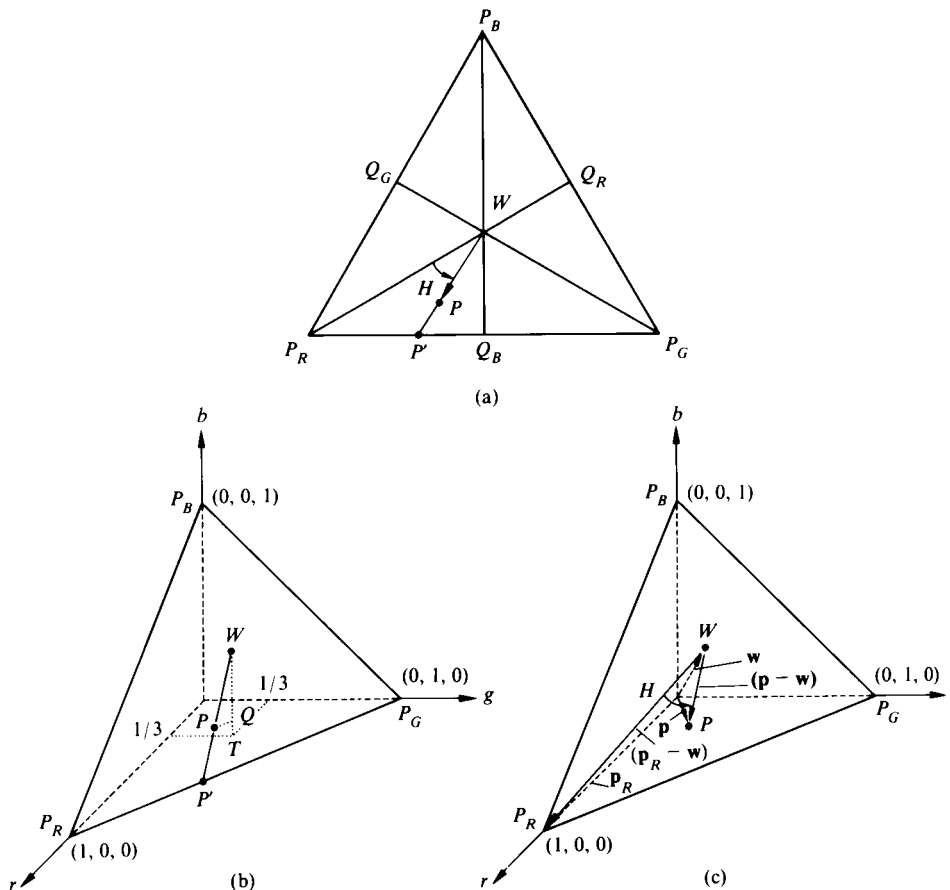
$$I = \frac{1}{3}(R + G + B) \quad (\text{kp.80})$$

mikä antaa normalisoidut arvot välille  $[0, 1]$ .

Seuraava askel on määrätä  $H$  ja  $S$ .  $H$ :n määrittämiseksi HSI kolmiosta rakennetaan kuvan kp.46 mukaiset geometriset konstruktiot, joista voidaan johtaa seuraavat tilanteet.

- Pisteen  $W$  koordinaatit ovat  $(1/3, 1/3, 1/3)$ .
- satunnaisen väripisteen  $P$  koordinaatit ovat  $(r, g, b)$ .
- Vektoria origosta  $W$ :n merkitään  $w$ . Vastaavasti vektoreita origosta pisteisiin  $P_R$  ja  $P$  merkitään  $p_R$  ja  $p$ .
- Suorat  $P_iQ_i$ , jossa  $i = R, G, B$ , leikkaavat pisteen  $W$ .
- Oletetaan  $r_0 = R/I$ ,  $g_0 = G/I$  ja  $b_0 = B/I$ , jossa  $I$  on annettu yhtälössä (kp.80). Nähdään, että  $P_RQ_R$  on pisteiden  $(r_0, g_0, b_0)$  ura kun  $g_0 = b_0$ . Samalla tavoin  $r_0 = g_0$  pitkin  $P_BQ_B$  ja  $r_0 = b_0$  pitkin  $P_GQ_G$ :ta.
- Mille tahansa pisteelle tasolla, jota rajoittaa kolmio  $P_RQ_RP_G$ , on voimassa  $g_0 \geq b_0$ . Mille tahansa pisteelle alueella, jota rajoittaa kolmio  $P_RQ_RP_B$ , on voimassa  $b_0 \geq g_0$ . Siten suora  $P_RQ_R$  erottaa alueen  $g_0 > b_0$  alueesta  $g_0 < b_0$ . Vastaavasti suora  $P_GQ_G$  erottaa alueen  $b_0 > r_0$  alueesta  $b_0 < r_0$  ja suora  $P_BQ_B$  erottaa alueen  $g_0 > r_0$  alueesta  $g_0 < r_0$ .
- Kun  $i = R, G$  tai  $B$ ,  $|WQ_i|/|P_iQ_i| = 1/3$  ja  $|WP_i|/|P_iQ_i| = 2/3$ , jossa  $|\arg|$  tarkoittaa argumentin pituutta.
- Määritelmän mukaan  $RG$  sektori on alue, jota rajoittavat  $WP_RP_G$ ,  $GB$  sektori on alue, jota rajoittavat  $WP_BP_G$  ja  $BR$  sektori on alue, jota rajoittavat  $WP_BP_R$ .

Kuvan kp.46 mukaan satunnaisen värin sävy määritellään kulmana, joka jää segmenttisuorien  $WP_R$  ja  $WP$  väliin tai vektorimuodossa vektorien  $(p_R - w)$  ja  $(p - w)$  välinen kulma. Esimerkiksi kuten aikaisemmin todettiin niin  $H = 0$  vastaa punaista,  $H = 120^\circ$  vastaa vihreää.



Kuva kp.46 HSI mallin yksityiskohdat, jotka tarvitaan värisävy- ja kylläisyyden yhtälöiden määrittämiseen.

Vaikka kulma  $H$  voidaan mitata suhteessa mihin tahansa  $W$ :n kautta kulkevaan suoraan, värisävyn määrääminen suhteessa punaiseen on sovittu. Yleisesti seuraava yhtälö on voimassa kun  $0^\circ \leq H \leq 180^\circ$ .

$$(p - w) \cdot (p_R - w) = \|p - w\| \|p_R - w\| \cos H \quad (\text{kp.81})$$

jossa  $(x) \cdot (y) = x^T y = \|x\| \|y\| \cos H$  tarkoittaa kahden vektorin sisä tai pistetuloa ja kaksoisviivat tarkoittavat vektorin normia (pituutta). Ongelmana on nyt muokata yhtälö RGB perusvärien joukoksi. Tilanteista a. ja b.

$$\|p - w\| = \sqrt{\left(r - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(g - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2} \quad (\text{kp.82})$$

koska vektorin  $a$ , jonka komponentit ovat  $a_1, a_2$  ja  $a_3$ ,  $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ . Sijoittamalla  $r$ :n,  $g$ :n ja  $b$ :n yhtälöt (kp.76) ... (kp.78) yhtälöön (kp.82), saadaan

$$\|p - w\| = \sqrt{\frac{9(R^2 + G^2 + B^2) - 3(R + G + B)^2}{9(R + G + B)^2}} \quad (\text{kp.83})$$

Kun vektorit  $p_R$  ja  $w$  laajennetaan origosta pisteisiin  $(1, 0, 0)$  ja  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , saadaan

$$\|p_R - w\| = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \quad (\text{kp.84})$$

Pitämällä mielessä, että kahden vektori  $a$  ja  $b$  pistetulo  $a \cdot b = a^T b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . Silloin

$$\begin{aligned} (p - w) \cdot (p_R - w) &= \frac{2}{3} \left(r - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(g - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(b - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2R - G - B}{3(R + G + B)} \end{aligned} \quad (\text{kp.85})$$

Yhtälöstä (kp.81)

$$H = \cos^{-1} \left[ \frac{(p - w) \cdot (p_R - w)}{\|p - w\| \|p_R - w\|} \right] \quad (\text{kp.86})$$

Sijoittamalla yhtälöt (kp.83) ... (kp.85) yhtälöön (kp.86) ja sieventämällä yhtälö, saadaan seuraava yhtälö, jossa  $H$  on  $R$ :n,  $G$ :n ja  $B$ :n funktio

$$H = \cos^{-1} \left\{ \frac{0,5[(R - G) + (R - B)]}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right\} \quad (\text{kp.87})$$

Yhtälöllä (kp.87) saadaan  $H$ :n arvot välillä  $0^\circ \leq H \leq 180^\circ$ . Jos  $b_0 > g_0$ , silloin  $H$  on suurempi kuin  $180^\circ$ . Tällöin lasketaan  $H$  kaavasta  $H = 360^\circ - H$ . Joskus värisävy on annettu

tangenttiyhtälöllä käyttäen trigonometristä yhtäläisyyttä  $\cos^{-1} = 90^\circ - \tan^{-1}(x / \sqrt{1-x^2})$ . Kuitenkin yhtälö (kp.87) ei ole yksinkertaisempi vain visuaalisesti, vaan se on myös ylivoimainen laitteistototeutuksena.

Seuraava askel on johtaa  $S$ :n yhtälö RGB perusvärien funktiona. Jälleen tarvitaan kuvia kp.46 (a) ja (b). Koska värin kylläisyys on aste, jolla valkoinen on sekoittunut perusväriin, kuvasta kp.46 (a) värin kylläisyys  $S$  pisteessä  $P$  saadaan suhteena  $|WP| / |WP'|$ .  $P'$  määrätään jatkamalla suoraa  $WP$  kunnes se leikkaa kolmion lähimmän sivun.

Kuvan kp.46 (b) mukaan olettamalla  $T$  olevan  $W$ :n projektio  $rg$  tasolla ( $b$  akselin suuntainen) ja  $Q$  on  $P$ :n projektio  $WT$ :llä (saman suuntainen  $rg$  tason kanssa). Silloin

$$S = \frac{|WP|}{|WP'|} = \frac{|WQ|}{|WT|} = \frac{|WT| - |QT|}{|WT|} \quad (\text{kp.88})$$

jossa seuraava askel seuraa samanlaisista kolmioista. Koska  $|WT| = 1/3$  ja  $|QT| = b$  tarkastellussa sektorissa

$$S = 3\left(\frac{1}{3} - b\right) = 1 - 3b = 1 - b_0 \quad (\text{kp.89})$$

jossa viimeinen askel seuraa yhtälöstä (kp.79) ja tilanteesta (e). Voidaan myös nähdä, että  $b_0 = \min(r_0, g_0, b_0)$   $RG$  sektorissa. Voidaan lisäksi osoittaa samantapaisilla argumenteilla, että

$$\begin{aligned} S &= 1 - \min(r_0, g_0, b_0) \\ &= 1 - \frac{3}{R + G + B} [\min(R, G, B)] \end{aligned} \quad (\text{kp.90})$$

on yleisesti totta mille tahansa HSI kolmion pisteelle.

Näin määritellyt tulokset antavat seuraavat yhtälöt määrätä välillä  $[0, 1]$  olevat HSI arvot samalla väleillä olevista RGB arvoista

$$I = \frac{1}{3}(R + G + B) \quad (\text{kp.91})$$

$$S = 1 - \frac{3}{R + G + B} [\min(R, G, B)] \quad (\text{kp.92})$$

ja

$$H = \cos^{-1} \left\{ \frac{0,5[(R - G) + (R - B)]}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right\} \quad (\text{kp.93})$$

jossa kuten aikaisemminkin  $H = 360^\circ - H$ , jos  $(B/I) > (G/I)$ . Värisävyn normalisoimiseksi välille  $[0, 1]$ , merkitään  $H = H/360^\circ$ . Lopuksi, jos  $S = 0$ , yhtälöstä (kp.88) seuraa, että  $|WP|$

täytyy olla 0. Tämä tarkoittaa, että  $W$  ja  $P$  ovat sama piste ja  $H$ :n määrittäminen on tarkoituksetonta. Näinollen värisävy ei ole määritelty silloin kun kylläisyys on 0. Samoin yhtälöistä (kp.91) ja (kp.92) värikylläisyys on määrittelemätön jos  $I = 0$ .

### Muunnos HSI mallista RGB malliin

Normalisoiduista välillä  $[0, 1]$  HSI mallin parametreista johdetaan seuraavaksi samalla välillä  $[0, 1]$  olevat RGB komponentit. Analyysi riippuu tilanne  $h$ :ssa määrittelystä  $H$ :n sektorista. Aluksi merkitään  $H = 360^\circ(H)$ , joka palauttaa värisävyyn välille  $[0^\circ, 360^\circ]$ .

$RG$  sektorissa,  $0^\circ < H \leq 120^\circ$ , yhtälöstä (kp.89) saadaan

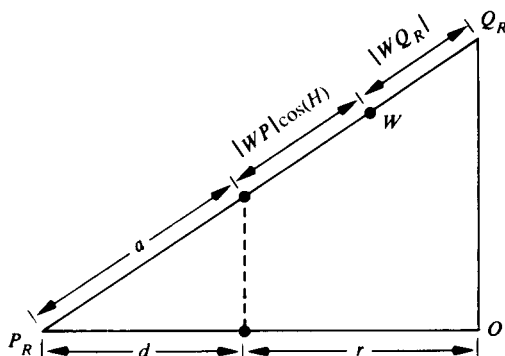
$$b = \frac{1}{3}(1 - S) \quad (\text{kp.94})$$

Seuraavaksi johdetaan  $r$ , joka  $P$ :n projektiio punaisen akselille kuvassa kp.46 (a). Tarkastellaan kuvassa kp.47 olevaa kolmiota  $P_R O Q_R$ , jossa  $O$  on  $rgb$  koordinaattijärjestelmän origo. Kolmion hypotenuusa on suora  $P_R Q_R$  kuvassa kp.46 (a) ja suoran laajennus  $O$ :sta  $P_R$ :ään on punainen akseli, joka sisältää  $r$ :n. Katkoviiva on kolmion  $P_R O Q_R$  leikkaus tasolla, joka sisältää  $P$ :n ja on kohtisuoraan punaista akselia vastaan. Nämä kaksi ehtoa osoittavat myös, että taso sisältää myös  $r$ :n. Lisäksi piste, jossa  $P_R Q_R$  leikkaa tason sisältää  $P$ :n projektion suoralla  $P_R Q_R$ . Tämä on kuvassa kp.46 (a)  $|WP| \cos H$ . Samanlaisista kolmioista

$$\frac{|P_R Q_R|}{|P_R O|} = \frac{a}{d} \quad (\text{kp.95})$$

Mutta  $|P_R O| = 1$ ,  $d = 1 - r$  ja  $a = |P_R Q_R| - (|WP| \cos H + |WQ_R|)$ . Sijoittamalla nämä tulokset yhtälöön (kp.95), saadaan

$$\begin{aligned} r &= \frac{|WQ_R|}{|P_R Q_R|} + \frac{|WP|}{|P_R Q_R|} \cos H \\ &= \frac{1}{3} + \frac{|WP|}{|P_R Q_R|} \cos H \end{aligned} \quad (\text{kp.96})$$



Kuva kp.47 Järjestely, jota käytetään johdettaessa muunnos HSI:stä RGB:hen.

jossa käytettiin  $|P_R Q_R| = 3|WQ_R|$  kuvasta kp.46 (a). Ainoa tuntematon tässä yhtälössä on  $|WP|$ , joka yhtälöstä (kp.88) on  $|WP| = S|WP'|$ . Suorien  $P_R Q_R$  ja  $WQ_B$  välinen kulma kuvassa kp.46 (a) on  $60^\circ$ . Tällöin  $|WQ_B| = |WP'| \cos(60^\circ - H)$  tai  $|WP'| = |WQ_B| / \cos(60^\circ - H)$ . Huomioimalla, että  $|WQ_B| = |WQ_R|$  ja sijoittamalla tulokset yhtälöön (kp.96), saadaan

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{3} + \frac{S|WQ_R| \cos H}{|P_R Q_R| \cos(60^\circ - H)} \\ &= \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \end{aligned} \quad (\text{kp.97})$$

jossa  $|P_R Q_R| = 3|WQ_R|$  jälleen. Lopuksi  $g = 1 - (r + b)$  yhtälöstä (kp.79). Näin tulos välillä  $0^\circ < H \leq 120^\circ$  on

$$r = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \quad (\text{kp.98})$$

ja

$$g = 1 - (r + b) \quad (\text{kp.99})$$

Edellä määritellyt värikomponentit ovat normalisoituja yhtälön (kp.79) mielessä. RGB komponentit voidaan palauttaa yhtälöistä (kp.76) ... (kp.80), jolloin  $R = 3Ir$ ,  $G = 3Ig$  ja  $B = 3Ib$ .

GB sektorille  $120^\circ < H \leq 240^\circ$  voidaan yhtälöt kehittää edelläkuvatulla menetelmällä, jolloin

$$H = H - 120^\circ \quad (\text{kp.100})$$

$$r = \frac{1}{3}(1 - S) \quad (\text{kp.101})$$

$$g = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \quad (\text{kp.102})$$

ja

$$b = 1 - (r + g) \quad (\text{kp.103})$$

$R$ ,  $G$  ja  $B$  saadaan  $r$ :stä,  $g$ :stä ja  $b$ :stä edellä kuvatulla tavalla. BR sektorille  $240^\circ < H \leq 360^\circ$  johdetaan yhtälöt

$$H = H - 240^\circ \quad (\text{kp.104})$$

$$g = \frac{1}{3}(1 - S) \quad (\text{kp.105})$$

$$b = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \quad (\text{kp.106})$$

ja

$$r = 1 - (r + g) \quad (\text{kp.107})$$

$R$ ,  $G$  ja  $B$  saadaan  $r$ :stä,  $g$ :stä ja  $b$ :stä saadaan samalla tavoin kuin sektorissa  $RG$ .

## PSEUDOVÄRI KUVANKÄSITTELY

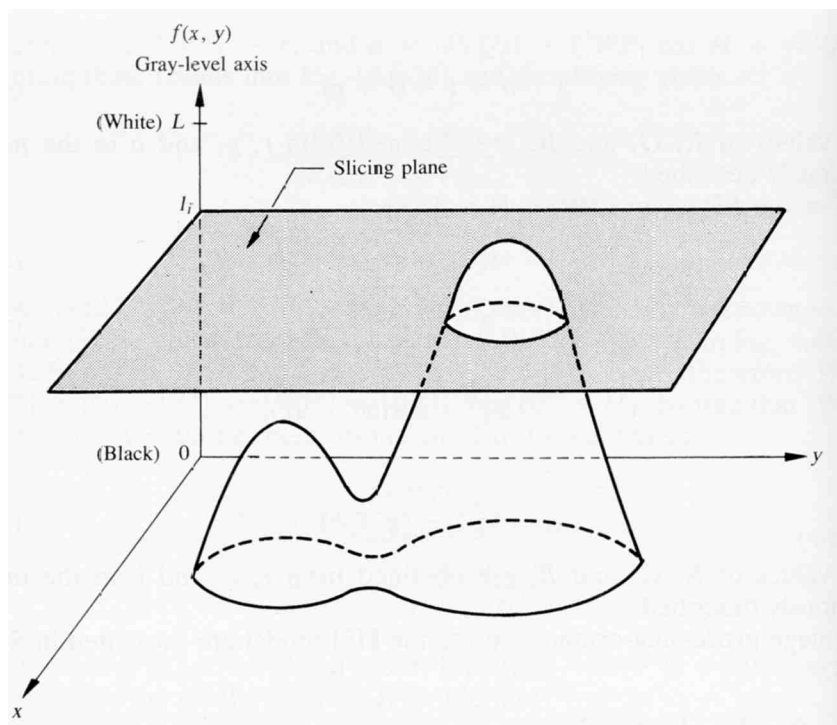
Tässä jaksossa käsitellään menetelmiä, joilla väritetään yksivärikuvia perustuen niiden erilaisiin harmaataso ominaisuuksiin.

### Intensiteetin viipalointi

Intensiteetin viipalointi ja värikoodaus on eräs yksinkertaisimmista pseudoväri kuvankäsittelystä. Menetelmässä 2-ulotteinen intensiteettifunktio leikataan koordinaattiakselien suuntaisilla tasoilla intensiteettiviipaleisiin. Kuvassa kp.48 on esimerkki, jossa taso  $f(x, y) = l_i$  jakaa intensiteettifunktion kahteen osaan.

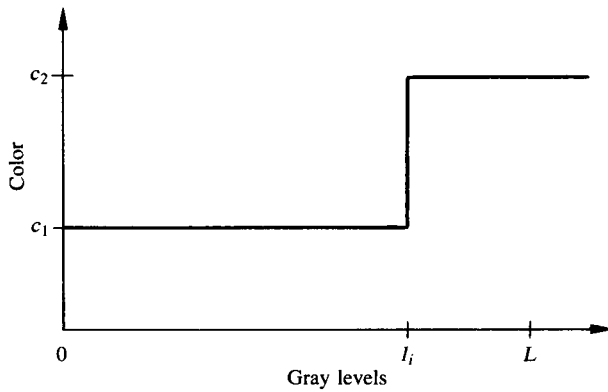
Kuvassa kp.48 tason kummallekin puolelle annetaan eri väri. Pikselit, joiden arvo on pienempi kuin pason arvo, väritetään yhdellä värillä ja tason yläpuoliset pikselit toisella. Tasolla oleville pikseleille annetaan tapauksesta riippuen jompikumpi väri. Tuloksena on kaksivärikuva, jonka visuaalista ilmettä voidaan muuttaa siirtämällä tasoa ylös tai alas intensiteettiakselilla.

Yleisesti tekniikka voidaan vetää yhteen seuraavasti. Oletetaan, että  $M$  tasoa määrittelevät harmaatasot  $l_1, l_2, \dots, l_M$  ja  $l_0$  edustaa mustaa,  $f(x, y) = 0$ , ja taso  $l_L$  on valkoinen,  $f(x, y) = L$ . Silloin olettaen, että  $0 < M < L$ ,  $M$  jakaa harmaa-asteikon  $(M + 1)$ :een alueeseen ja väri



Kuva kp.48 Geometrinen kuvaus intensiteetin viipalointitekniikasta





Kuva kp.49 Vaihtoehtoinen esitystapa intensiteetin viipalointi menetelmälle.

kullekin välille määritellään suhteella

$$f(x, y) = c_k \quad \text{jos } f(x, y) \in R_k \quad (\text{kp.106})$$

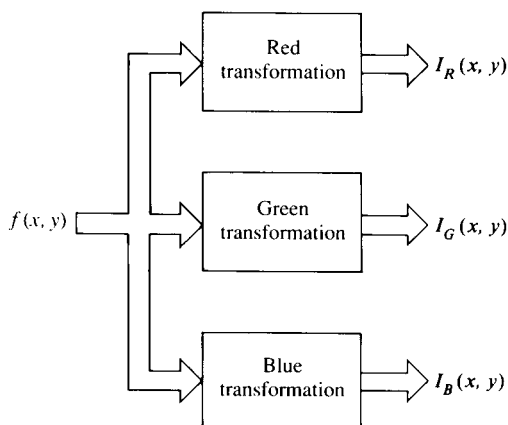
jossa  $c_k$  on  $k$ :nnen alueen  $R_k$  väri. Tasoidea on käyttökelpoinen erityisesti intensiteetin viipaloinnin geometrisissa tulkinnoissa.

Kuvassa kp.49 on vaihtoehtoinen esitystapa, joka määrittelee saman kuvauksen kuin kuva kp.48. Kuvan kp.49 kuvausfunktion mukaisesti jokaiselle harmaatasolle osoitetaan toinen kahdesta väristä riippuen siitä onko pikselin arvo tason  $i_i$  ala- tai yläpuolella. Kun tasoja on enemmän, kuvausfunktio saa porrasmaisen muodon.

### Harmaataso-värimuunnos

Muut kuin yksinkertainen intensiteetin viipalointi muunnostavat ovat yleisempiä ja siten kykeneviä parempiin kuvan muokkaustuloksiin. Eräs menetelmä, joka on erityisen kiinnostava, on esitetty kuvassa kp.50. Perusidea menetelmässä on suorittaa kullekin pikselille kolme erillistä harmaataso pseudovärimuunnosta. Tämän jälkeen punainen vihreä ja sininen viedään kukin näytön vastaavalle värille. Menetelmä tuottaa yhdistelmäkuva, jonka värisisältö riippuu muunnosfunktion luonteesta.

Kuvassa kp.49 esitetty menetelmä on edellä esitetyn menetelmän erikoistapaus. Siinä harmaatasojen paloittain lineaarinen funktio määrittelee värit. Kuitenkin tässä jaksossa kuvailtu menetelmä voi perustua pehmeisiin epälineaarisiiin funktioihin, mikä antaa menetelmälle suuremman joustavuuden.



Kuva ko.50 Toiminnallinen lohkokaavio pseudoväri kuvankäsittelylle. Lähdöt  $I_R$ ,  $I_G$  ja  $I_B$  syötetään näytön vastaaville väreille.

## Suodatinmenetelmä

Kuvassa kp.51 on värikoodaus kaavio, joka perustuu taajuustason operaatioihin. Tämän menetelmän idea on sama kuin yleensä taajuustason suodatuksessa. Nyt suodatusta sovelletaan erikseen kolmeen osakuvaan, jotka tämän jälkeen syötetään näytön värisisäänmenoihin. Käsiteltävästä osakuvasta otetaan Fourier-muunnos, joka suodatetaan halutut ominaisuudet omaavalla suodattimella. Tämän jälkeen muunnos palautetaan takaisin spatiaalitasoon käänteisellä Fourier-muunnoksella. Näitä prosesseja voi vielä seurata jälkiprosessointi kuten histogrammin taseus ennen kuin osakuva syötetään näytölle.

Tavoite tässä väriprosessointitekniikassa on värikoodatut alueet, jotka riippuvat kuvan taajuussisällöstä. Tyypillinen suodatinlähestyminen on käyttää alipäästö-, kaistanpäästö- (kaistanesto-) ja ylipäästösuodatinta erottamaan kuvasta kolme taajuusaluetta. Kaistanpäästö- ja kaistanestosuodattimet ovat aikaisemmin käsiteltyjen alipäästö- ja ylipäästösuodattimien laajennuksia. Yksinkertainen menetelmä muodostaa suodatin, joka vaimentaa tai vahvistaa taajuuksia pisteen  $(u_0, v_0)$  ympyränaapurustossa, on suorittaa ylipäästösuodattimelle koordinaatiston siirto. Menetelmä ideaaliselle suodattimelle on seuraava.

Ideaallinen kaistanestosuodatin (IBRF) vaimentaa kaikki taajuudet naapurustossa, jonka säde on  $D_0$  ja jonka keskipiste on  $(u_0, v_0)$ , joten

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{kun } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{kun } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (\text{kp.107})$$

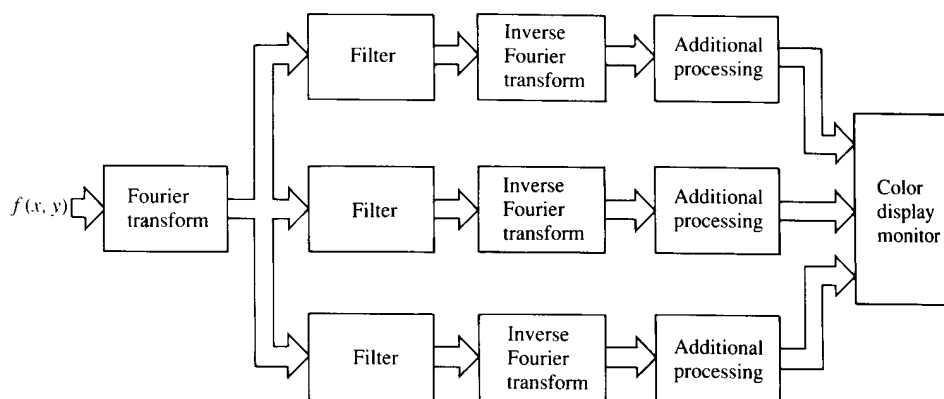
jossa

$$D(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} \quad (\text{kp.108})$$

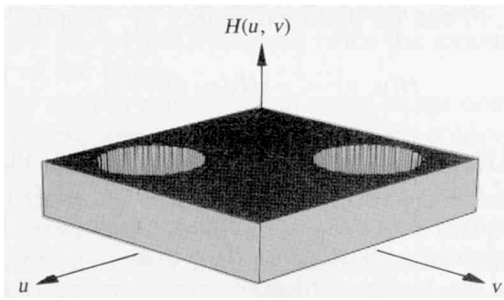
Yhtälö (kp.107) on muodoltaan sama kuin yhtälö (kp.43). Erona on, että yhtälössä (kp.107) etäisyys  $D(u, v)$  lasketaan pisteestä  $(u_0, v_0)$  eikä origosta kuten yhtälössä (kp.43).

Käyttämällä hyväksi Fourier-muunnoksen symmetriaa, kaistanesto, joka ei ole symmetrinen origon suhteen, täytyy suorittaa symmetrisenä parina, jotta tulos olisi haluttu. Ideaalisen suodattimen tapauksessa yhtälöstä (kp.107) saadaan

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{kun } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ tai } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{muulloin} \end{cases} \quad (\text{kp.109})$$



Kuva kp.51  
Pseudoväri  
kuvankäsittelyn  
suodatinmalli



Kuva kp.52 Ideaalinen kaistanestosuodatin

jossa

$$D_1(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} \quad (\text{kp.110})$$

ja

$$D_2(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} \quad (\text{kp.111})$$

Menetelmä voidaan laajentaa neljään tai useampaan alueeseen. Myös Butterworth suodatinta voidaan suoraan soveltaa kaistanestoon soveltamalla edelläkuvattua menetelmää. Kuvassa kp.52 on perspektiivikuva tyypillisestä ideaalisesta kaistanestosuodattimesta.

Edellä kuvattu suodatin on paikallistettu johonkin Fourier-muunnoksen pisteeseen, joka ei ole origossa. Mikäli halutaan suodattaa origokeskinen taajuuskaista, tarvitaan samantapaiset symmetriset suodattimet kuin alipäästö- ja ylipäästösuodattimet ovat. Tässä tapauksessa menetelmä ideaaliselle ja Butterworth suodattimille on seuraava.

Säteettäisesti symmetrinen ideaalinen kaistanestosuodatin, joka suodattaa origokeskisesti taajuuskaistan, on seuraava

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{kun } D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & \text{kun } D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{kun } D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases} \quad (\text{kp.112})$$

jossa  $W$  on kaistan leveys ja  $D_0$  on kaistan säteettäinen keskipiste. Kuten säteettäisesti symmetriset suodattimet niin myös tämä suodatin voidaan määritellä täysin leikkauskuvalla. Esimerkiksi säteettäisesti symmetrinen Butterworth kaistanestosuodatin, jonka kertaluku on  $n$ , siirtofunktio on

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}} \quad (\text{kp.113})$$

jossa  $W$  on kaistan leveys ja  $D_0$  on sen keskipiste.

Kaistanpäästösuodatin päästää tietyn kaistan taajuuudet muuttumattomana ja vaimentaa muita. Suodattimen toiminta on päinvastainen kaistanestosuodattimeen nähden. Merkitään

kaistanestosuodattimen siirtofunktiota  $H_R(u, v)$ , jolloin vastaava kaistanpäästösiirtofunktio  $H_P(u, v)$  saadaan

$$H_P(u, v) = -[H_R(u, v) - 1] \quad (\text{kp.114})$$

## TÄYSVÄRIKUVIEN KÄSITTELY

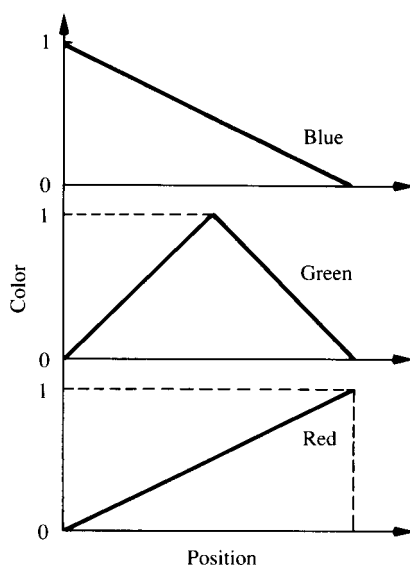
Kuvien käsittelyjakson päätteeksi esitetään joitakin yksityiskohtia, jotka valottavat täysväritekniikoiden merkitystä kuvankäsittelyssä. Erityisesti kiinnostaa HSI malli aikaisemmin käsitellyistä syistä. Tässä mallissahan kuvan intensiteetti ja värisisältö on erotettu. Värisävy ja kylläisyys on lähellä ihmisen tapaa käsitellä värejä.

### HSI komponenttikuvan muodostaminen RGB kuvasta

Koska RGB mallilla on keskeinen merkitys värikuvien näyttämisessä, aloitetaan tarkastelu vertaamalla RGB ja HSI mallien eroavaisuuksia ja samankaltaisuuksia. Tämä kehittäminen tarjoaa myös mahdollisuuden suventaa ymmärtämystä HSI mallista. Muistutetaan lisäksi, että näyttöä varten HSI malli on palautettava takaisin RGB malliksi.

Oppikirjan väritaulussa VIII (a) on RGB väritestikuvio. Ylhäällä on kahdeksan kapeaa raitaa. Ylinnä on musta, jota seuraavat puhtaat perusvärit ja toisiovärit ja viimeisenä valkoinen. Näitä seuraa leveä monivärinen raita alkaen sinisestä ja päätyen vihreän kautta punaiseen. Seuraavina on kaksi harmaa-asteikkoraitaa, joiden sävyt ovat vastakkaisiin suuntiin. Kuvan alaosa on yläosan peilikuva, jonka jakopinta on keskellä olevien kahden harmaa-asteikko raidan välissä. Kuvassa kp.53 on punaisen, vihreän ja sinisen profiilit taulun VIII (a) muttuvärisessä raidassa.

Täysvärikuvaan viitattaessa annetaan yleensä bittien lukumäärä, jolla yksi pikseli on kuvattu. Näin 24 bittinen kuva tarkoittaa, että pikselin kolme väriä on esitetty 24 bitillä. Yleensä, mutta ei aina, bitit on jaettu tasan kolmen värin kesken. Tämä on tilanne myös taulun VIII tapauksessa, jossa on käytetty 8 bittiä kuhunkin väriin. Näin kullakin värillä on 255 eri tasoa välillä  $[0, 255]$ . Aikaisemmin RGB mallin värit esitettiin välillä  $[0, 1]$ . Nämä välit voidaan



Kuva kp.53 Väriefunktiot, joita on käytetty muodostettaessa taulun VIII väriraitaa.

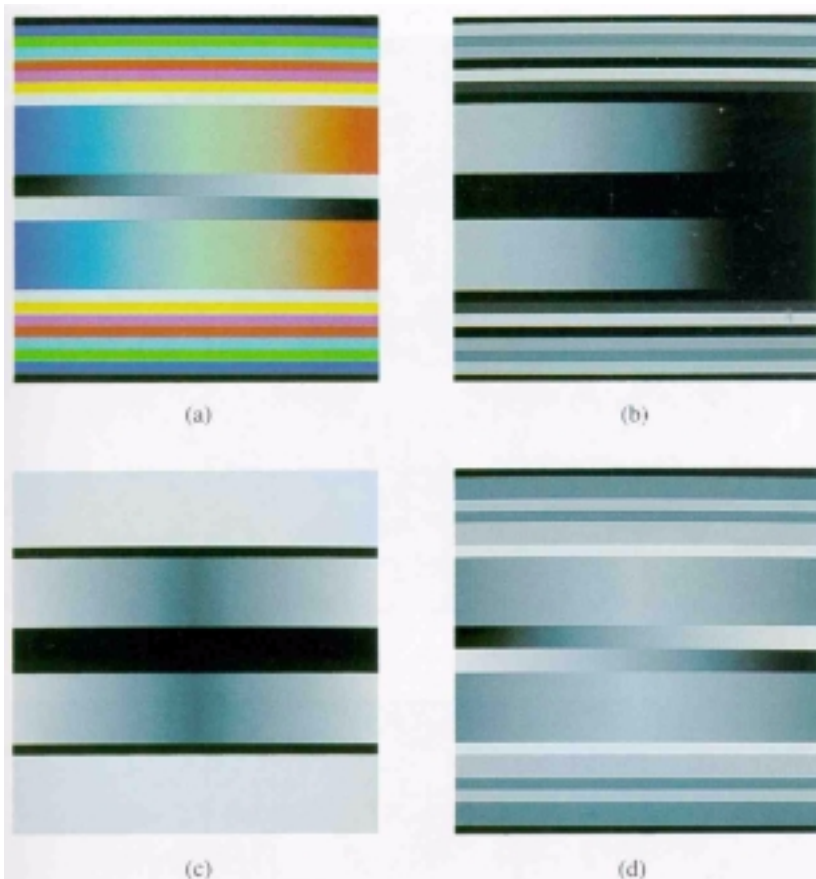
johtaa toisistaan skaalaamalla.

HSI mallin komponenttien tilanne on hiukan toinen. Intensiteettikuva on samanlainen kuin kukin RGB kuva. Värisävykuvassa kullakin pikselillä on arvo, mikä vastaa kulmaa. Käytettäessä 8 bittiä voidaan esittää 256 eri kulmaa, jotka ovat  $n(360/255)^{\circ}$ , kun  $n = 0, 1, 2, \dots, 255$ . Samalla tavoin värikylläisyys on välillä 0 ... 1 ja yhden bitin lisäys vastaa 1/255.

Tarkastellaan taulua VIII (b), jossa on RGB kuvasta VIII (a) johdettu intensiteettikuva käyttäen yhtälöä (kp.93). Kun yksivärisillä komponenteilla RGB kuvassa on nolla kylläisyys, värisävyä ei ole määritetty. Nämä on näytetty taulussa VIII (b) mustana. Koska värisävyarvot ovat asteita, on taulun VIII (b) harmaatasot nähtävä kulmina, joissa vaalea sävy tarkoittaa suurta kulmaa. Koska punaisella on HSI mallissa pienin kulma niin punainen näkyy taulussa VIII tummimpana ja vastaavasti sininen vaaleimpana.

Taulu VIII (c) näyttää RGB kuvasta johdetun värikylläisyyden. Täysin kylläiset perus- ja toisiovärit näkyvät valkoisina kylläisyyskuvassa. Kun kylläisyys ei ole määritetty, kun intensiteetti on nolla, niin kaikki mustat komponentit on näytetty valkoisina. Lisäksi valkoinen RGB kuvassa on musta kylläisyyskuvassa sillä valkoisen kylläisyys on nolla. Muuttuvavärisen raidan molemmat päät ovat valkoisia ja keskikohta tummampi. Tämä johtuu raidan värikomponenttien profiileista.

Lopuksi taulu VIII (d) näyttää RGB kuvasta johdetun HSI mallin intensiteettikomponentin, joka on laskettu kaavalla (kp.91). Kuten odotettua, musta, valkoinen ja harmaa esiintyvät kuin RGB kuvassa. Puhtailla perusvärikomponenteilla on sama arvo ja siten vakio harmaataso. Puhtailla toisiovärikomponenteilla on myös vakio harmaataso, mutta niiden arvo on



*Taulu VIII Alkuperäinen RGB kuva (a), värisävy (b), värikylläisyys (c) ja intensiteetti (d)*

kaksinkertainen ja niin ollen harmaataso on vaaleampi verrattuna perusväriihin. Tulos on odotettu, sillä toisioväri on muodostettu summaamalla kaksi perusväriä. Samoin muuttuvavärisen raiden intensiteetti käyttäytyy odotetusti.

### **Kuvan muokkaaminen käyttäen HSI mallia**

Aikaisemmin jo todettiin, että HSI malli on ideaalinen kuvan muokkaamiseen, koska intensiteetti ja värikomponentit on erotettu. Tästä syystä mitä tahansa yksivärikuvan muokkaustekniikkaa voidaan käyttää täysvärikuvan käsittelyyn. Kuva muunnetaan HSI malliksi, suoritetaan muokkaus intensiteetti komponentille ja lopuksi malli muutetaan takaisin RGB kuvaksi. Prosessissa värisisältö jää muuttumattomaksi.

Taulu IX valottaa tilannetta. Taulussa IX (a) on RGB kuva, jossa taustan yksityiskohdat ovat jääneet merkittävästi varjoon. Tilanteen korjaamiseksi kuva muutettiin ensin HSI muotoon ja intensiteetti komponentille suoritettiin histogrammin tasaus. Tämän jälkeen kuva muutettiin takaisin RGB muotoon ja lopputulos on nähtävissä taulussa IX (b). Näkyvien yksityiskohtien lisääntyminen on merkittävää. Koska histogrammin tasauksella on taipumus vaalentaa kuvaa merkittävästi, värikomponentit eroavat jonkin verran alkuperäisestä kuvasta. Vaikka värisävy ja kylläisyys ovat säilyneet ennallaan, värit ovat kirkkaammat, koska intensiteetti on kasvanut. Soveltamalla tätä muokkaustekniikkaa jokaiseen kuvan RGB komponenttiin voisi lisätä yksityiskohtia ja kirkkautta, mutta värien sävyt olisivat muokkautuneet. Tämä johtuu eri värikomponenttien muuttuneista suhteista.



*Taulu IX Alkuperäinen RGB kuva (a) ja tulos histogrammin tasauksen jälkeen (b)*





# DIGITAALISEN KUVAN KORJAAMINEN

Raimo Jokinen

- ◆ Muokkautumisen malli
- ◆ Kierto- ja lohkoittaisen kiertomatriisin diagonalisointi
- ◆ Algebrallinen lähestyminen kuvan korjaamiseen
- ◆ Käänteinen suodatus
- ◆ Pienimmän keskimääräisen neliön (Wiener) suodatin
- ◆ Rajoitettu pienimmän neliön korjaaminen
- ◆ Interaktiivinen korjaaminen
- ◆ Korjaaminen spatiaalitasossa
- ◆ Geometriamuunnokset
- ◆ Lähteet
- ◆ Harjoitustehtävät

*Näkemämme asiat eivät ole niitä, joita näemme. Kohteet jäävät meille täysin tuntemattomiksi, jos ne jäävät aistiemme ulkopuolelle. Me emme tiedä mitään, mutta meidän tapamme huomioida niitä ...*

*Immanuel Kant*

Kuten kuvan parantamisessa niin myös kuvan korjaamisen päämäärä on kuvan parantaminen jossakin mielessä. Kuvan korjaaminen on prosessi, jossa kuvasta poistetaan virhe, jonka syntymekanismi ainakin osittain tunnetaan. Kuvan korjaaminen on orientoitunut mallintamaan virhemekanismiin ja suorittamaan tämän jälkeen käänteisen operaation alkuperäisen virheettömän kuvan palauttamiseksi. Tämä lähestymistapa tarvitsee kuvan hyvyyden mittaamista, jotta voitaisiin saavuttaa optimi tulos. Kuvan parantamisen tekniikat ovat perimmältään heuristisia proseduureja, jotka soveltuvat kuvat paremmin ihmisen visuaaliseen järjestelmään. Esimerkiksi kontrastin laajentaminen on kuvan parantamista, koska sen perimmäinen tarkoitus on tehdä kuvasta miellyttävämmän tuntuinen. Sen sijaan pehmeän kuvan terävöittäminen pehmennykselle käänteisellä operaatiolla on kuvan korjaamista.

Ensimmäiset kuvan korjaamistekniikat perustuivat taajuustason konsepteihin. Tässä luvussa keskitytään kuitenkin uudempaan algebralliseen tekniikkaan, jonka etuna on, että se sallii johtaa joukon erilaisia korjausmenetelmiä samoista perusperiaatteista. Algebrallisessa menetelmässä joudutaan tavallisesti käsittelemään samanaikaisesti suurta yhtälöjoukkoa. Voidaan kuitenkin johtaa myös menetelmiä, joissa laskennallinen monimutkaisuus on samaa luokkaa taajuustason menetelmien kanssa.

Tässä luvussa johdettu materiaali keskittyy tiukasti kuvaan. Käsiteltävissä tapauksissa ongelmaa käsitellään muokkautuneen digitaalisen kuvan näkökulmasta. Luvussa ei käsitellä sensorien, digitoijien ja näyttöjen virhemekanismia. Nämä aiheet, vaikkakin vaikuttavat merkittävästi lopputulokseen, ovat tämän esityksen aihepiirin ulkopuolella. Luvun lopussa on joukko viittauksia kirjoituksiin, jotka käsittelevät näitä aiheita.

## MUOKKAUTUMISMALLI

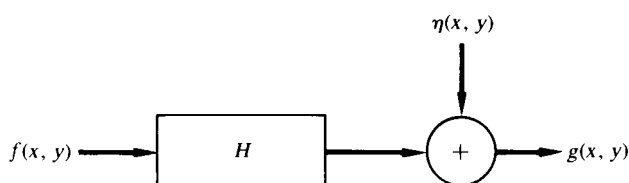
Kuvassa kk.1 on muokkautumisprosessin malli. Operaattori  $H$  yhdessä summautuvan kohinan  $\eta(x, y)$  kanssa muokkaa tulevan kuvan  $f(x, y)$  ja tuottaa vääristyneen kuvan  $g(x, y)$ . Digitaalinen kuvan korjaaminen voidaan nähdä prosessina määrittää kuvan  $f(x, y)$  estimaatti kuvasta  $g(x, y)$  ja tunnistamalla operaattorin  $H$  mekanismi. Lisäksi oletetaan, että tieto kohinasta  $\eta(x, y)$  rajoittuu sen tilastollisiin ominaisuuksiin.

## MÄÄRITELMIÄ

Sisäänmenon ja ulostulon suhde kuvassa kk.1 voidaan kirjoittaa

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y) \quad (\text{kk.1})$$

Toistaiseksi oletetaan, että  $\eta(x, y) = 0$  niin, että  $g(x, y) = H[f(x, y)]$ . Silloin  $H$  on lineaarinen, jos



Kuva kk.1 Kuvan muokkautumisprosessin malli

$$H[k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)] = k_1 H[f_1(x, y)] + k_2 H[f_2(x, y)] \quad (\text{kk.2})$$

jossa  $k_1$  ja  $k_2$  ova satunnaisia vakioita,  $f_1(x, y)$  ja  $f_2(x, y)$  ovat kaksi sisääntulevaa kuvaa. Jos  $k_1 = k_2 = 1$ , muuttuu yhtälö (kk.2) muotoon

$$H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)] \quad (\text{kk.3})$$

jota sanotaan summautumisominaisuudeksi. Tämä ominaisuus sanoo, että jos  $H$  on lineaarinen operaattori niin vaste kahden tulon summaan on sama kuin vaste erikseen kumpaankin tuloon jotka sen jälkeen summataan.

Kun  $f_2(x, y) = 0$ , yhtälö (kk.2) saa muodon

$$H[k_1 f_1(x, y)] = k_1 H[f_1(x, y)] \quad (\text{kk.4})$$

jota sanotaan homogeenisuusominaisuudeksi. Toisin sanoen, jos  $H$  on lineaarinen operaattori niin vakiolla kerrottu tulo on sama kuin lähtö kerrottuna samalla vakiolla. Lineaarinen prosessi on sekä summautuva että homogeeninen.

Operaattori, jonka tulon ja lähdön suhde on  $g(x, y) = H[f(x, y)]$ , on paikka- tai tilainvariantti jos

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta) \quad (\text{kk.5})$$

kaikilla  $f(x, y)$ :llä ja millä tahansa  $\alpha$  ja  $\beta$ . Tämä ominaisuus tarkoittaa, että operaattorin vasta riippuu vain kunkin kuvapisteen arvosta mutta ei sen paikasta.

## JATKUVAN FUNKTION MUOKKAUTUMISEN MALLI

Pienillä muutoksilla merkinnöissä yhtälö (km.83) saadaan muotoon

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{kk.6})$$

Silloin, jos  $\eta(x, y) = 0$ , yhtälö (kk.1)

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right] \quad (\text{kk.7})$$

Jos  $H$  on lineaarinen operaattori ja summautuminen laajennetaan käsittämään myös integraalin, silloin

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \quad (\text{kk.8})$$

Koska  $f(\alpha, \beta)$  on riippumaton muuttujista  $x$  ja  $y$ , saadaan homogeenisuuden perusteella

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \quad (\text{kk.9})$$

Termi

$$h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] \quad (\text{kk.10})$$

on  $H$ :n impulssivaste. Toisin sanoen, jos  $\eta(x, y) = 0$  yhtälössä (kk.1), silloin  $h(x, \alpha, y, \beta)$  on  $H$ :n vaste impulsiin, jonka voimakkuus on 1 koordinaateissa  $(\alpha, \beta)$ . Optiikassa impulssi on valopiste ja  $h(x, \alpha, y, \beta)$ :ää sanotaan tavallisesti pisteen leviämiskäyräksi, kuten kuvan parantamista käsittelevässä luvussa todettiin.

Sijoittamalla yhtälö (kk.10) yhtälöön (kk.9), saadaan

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{kk.11})$$

jota sanotaan **ensimmäisen lajin superpositio** (tai Freedholm) **integraaliksi**. Yhtälöllä on perustava merkitys lineaaristen järjestelmien teoriassa. Yhtälön sanoma on, että jos lineaarisen järjestelmän vaste  $H$  impulssille tunnetaan, niin järjestelmän vaste mille tahansa tulolle voidaan laskea yhtälöstä (kk.11). Toisin sanoen lineaarinen järjestelmä  $H$  on täysin määritelty sen impulssivasteen perusteella.

Jos  $H$  on paikkainvariantti, yhtälöstä (kk.5) saadaan

$$H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta) \quad (\text{kk.12})$$

Yhtälö (kk.11) yksinkertaistuu tällöin muotoon

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{kk.13})$$

mikä on yhtälön (kk.67) konvoluutiointegraali. Kun mukaan otetaan summautunut kohina, lineaarisen muokkautumisen malli on

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (\text{kk.14})$$

Jos  $H$  on paikkainvariantti, yhtälö (kk.14) yksinkertaistuu muotoon

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (\text{kk.15})$$

Kohinan oletetaan olevan kummassakin tapauksessa riippumaton paikasta.

Monia kuvan muokkautumisen tyyppejä voidaan mallintaa lineaarisella paikkainvariantilla prosessilla. Tämän lähestymistavan etuna on, että kuvan korjaamiseen voidaan käyttää lineaaristen järjestelmien laajoja menetelmiä. Epälineaariset ja paikkariippuvat menetelmät vaikkakin yleisemmät ja tavallisesti tarkemmat johtavat usein ratkaisemattomiin tai hyvin vaikeisiin laskennallisiin ongelmiin. Tässä luvussa keskitytään lineaarisiin paikkainvariantteihin menetelmiin. Myös tällä yksinkertaistuksella voidaan joutua laskennallisiin ongelmiin, jotka ovat nykyisten tietokoneiden mahdollisuuksien ylärajoilla tai jopa niiden yli.

## DISKREETIT YHTÄLÖT

Diskreettien paikkainvarianttien muokkautumismallien johtoa on yksinkertaistettu aloittamalla 1-ulotteisesta tapauksesta ja jättämällä kohinatarmi huomiotta. Oletetaan, että funktiot  $f(x)$  ja  $h(x)$  on näytteistetty lineaarisesti ja merkkijonon pituudet ovat  $A$  ja  $B$ . Tässä tapauksessa  $x$  on diskreetti muuttuja, jonka alue on  $0, 1, 2, \dots, A-1$   $f(x)$ :lle ja  $0, 1, 2, \dots, B-1$   $h(x)$ :lle.

Diskreettiin konvoluutioon perustuen näytteistetyt funktiot oletetaan jaksollisiksi jaksona  $M$ . Kahden jakson laskostuminen konvoluutiossa vältetään valitsemalla  $M \geq A + B - 1$ . Funktiot täydennetään nolilla niin, että niiden pituus on  $M$ . Merkitään täydennettyjä funktioita  $f_e(x)$ :llä ja  $h_e(x)$ :llä. Funktioitten konvoluutio on

$$g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)h_e(x-m) \quad (\text{kk.16})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Koska sekä  $f_e(x)$  että  $h_e(x)$  oletettiin jaksollisiksi, niin myös  $g_e(x)$  on jaksollinen jaksona  $M$ . Yhtälö (kk.16) voidaan esittää matriisimuodossa, jolloin

$$g = Hf \quad (\text{kk.17})$$

jossa  $f$  ja  $g$  ovat  $M$ :n mittaisia sarakevektoreita

$$f = \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \vdots \\ f_e(M-1) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.18})$$

ja

$$g = \begin{bmatrix} g_e(0) \\ g_e(1) \\ \vdots \\ g_e(M-1) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.19})$$

ja  $H$  on  $M \times M$  matriisi

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(-1) & h_e(-2) & \cdots & h_e(-M+1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(-1) & \cdots & h_e(-M+2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(-M+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.20})$$

Koska  $h_e(x)$  oletettiin jaksolliseksi, niin siitä seuraa, että  $h_e(x) = h_e(M+x)$ . Tämä ominaisuus sallii kirjoittaa yhtälö (kk.20) uudelleen

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.21})$$

Tämän matriisin rakenne näyttelee perustavaa roolia jatkossa läpi tämän luvun. Yhtälössä (kk.21) rivit ovat kierto-siirto suhteessa oikealle siirryttäessä ylhäältä alas. Toisin sanoen oikeanpuoleinen elementti on välittömästi alapuolella olevan rivin vasen elementti. Siirtoa sanotaan kierroksi koska oikealta matriisista ulos joutuva elementti on lisätty seuraavaksi alemman rivin alkuun vasemmalle. Lisäksi yhtälössä (kk.21)  $H$ :n kierto on täydellinen siinä mielessä, että ensimmäinen rivi saadaan kierroksella viimeisestä rivistä. Neliömatriisia, jossa jokainen rivi saadaan kiertosiirrolla edellisestä rivistä ja ensimmäinen rivi kiertosiirrolla viimeisestä, sanotaan kiertomatriisiksi. Pidetään mielessä, että  $H$ :n kiertokäyttäytyminen on suora seuraus  $h_e(x)$ :n olettamisesta jaksolliseksi.

### Esimerkki

Oletetaan, että  $A = 4$  ja  $B = 3$ . Tällöin  $M = 6$  ja  $f(x)$ :ää täydennetään kahdella ja  $h(x)$ :ää kolmella nolalla. Tässä tapauksessa  $f$  ja  $g$  ovat kuuden mittaisiavektoreita ja  $H$  on  $6 \times 6$  matriisi.

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(5) & h_e(4) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(5) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_e(5) & h_e(4) & h_e(3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix}$$

Kuitenkin  $h_e(x) = 0$  kun  $x = 3, 4, 5$  ja  $h_e(x) = h(x)$  kun  $x = 0, 1, 2$ , jolloin

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(2) & h(1) & h(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix}$$

Yhtälöiden laajentaminen 2-ulotteiseksi diskreetiksi muokkautumismalliksi on suoraviivaista. Kaksi digitoitua kuvaa  $f(x, y)$  ja  $h(x, y)$ , joiden koot ovat  $A \times B$  ja  $C \times D$ , täydennetään kokoon  $M \times N$  lisäämällä nollia. Eräs menetelmä tämän toteuttamiseksi on

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \quad \text{ja} \quad B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

ja

$$h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1 \quad \text{ja} \quad D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

Käsittelemällä täydennettyjä funktioita  $f_e(x, y)$  ja  $h_e(x, y)$  jaksollisina kahteen suuntaan jaksojen ollessa  $M$  x suuntaan ja  $N$  y suuntaan, näiden konvoluutio on

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x-m, y-n) \quad (\text{kk.22})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Konvoluutiofunktio  $g_e(x, y)$  on jaksollinen jakso on sama kuin funktioilla  $f_e(x, y)$  ja  $h_e(x, y)$ . Yksittäisten konvoluutiojaksojen laskostuminen vältetään valitsemalla  $M \geq A + C - 1$  ja  $N \geq B + D - 1$ . Diskreetin muokkautumismallin täydentämiseksi lisätään siihen  $M \times N$  nollilla täydennetty kohinatermi  $\eta_e(x, y)$ , jolloin yhtälö (kk.22) saa muodon

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x-m, y-n) + \eta_e(x, y) \quad (\text{kk.23})$$

jossa  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Olkoon  $f$ ,  $g$  ja  $h$   $MN$  ulotteisia sarakavektoreita, jotka on saatu pinomalla  $M \times N$  funktioitten  $f_e(x, y)$ ,  $g_e(x, y)$  ja  $\eta_e(x, y)$  rivit päällekkäin. Esimerkiksi  $f$ :n  $N$  ensimmäistä elementtiä ovat funktion  $f_e(x, y)$  ensimmäisen rivin elementit, seuraavat  $N$  elementtiä funktion  $f_e(x, y)$  seuraava rivi jne. Tämä menettely sallii kirjoittaa yhtälö (kk.23) vektorimatriisimuotoon

$$g = Hf + n \quad (\text{kk.24})$$

jossa  $f$ ,  $g$  ja  $h$  ovat  $(MN) \times 1$  ulotteisia ja  $H$  on  $MN \times MN$  ulotteinen. Tämä matriisi käsittää  $M^2$  osioon, joiden koko on  $N \times N$  ja on järjestetty seuraavasti

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_{M-1} & h_{M-2} & \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{M-1} & \cdots & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3} & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \quad (\text{kk.25})$$

Kukin osio  $H_j$  on muodostettu täydennetyn funktion  $h_e(x, y)$   $j$ :nnestä rivistä seuraavasti



$$H_j = \begin{bmatrix} h_e(j,0) & h_e(j,N-1) & h_e(j,N-2) & \cdots & h_e(j,1) \\ h_e(j,1) & h_e(j,0) & h_e(j,N-1) & \cdots & h_e(j,2) \\ h_e(j,2) & h_e(j,1) & h_e(j,0) & \cdots & h_e(j,3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_e(j,N-1) & h_e(j,N-2) & h_e(j,N-3) & \cdots & h_e(j,0) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.26})$$

jossa käytetään hyväksi funktion jaksollisuutta.  $H_j$  on kiertomatriisi ja  $H$ :n osiot kiertävät vastaavalla tavalla. Näistä syistä yhtälön (kk.25) matriisia  $H$  sanotaan **lohko-kiertomatriisiksi**.

Useimmat seuraavat aiheet keskittyvät yhtälön (kk.24) mukaiseen muokkautumismalliin. Pidetään lisäksi mielessä, että yhtälön (kk.24) johto perustui lineaariseen paikka-invarianttiin muokkautumisprosessiin. Kuten aikaisemmin todettiin, tehtävänä on määrittää kuvan  $f(x, y)$  estimaatti kuvasta  $g(x, y)$ , kun  $h(x, y)$  ja  $\eta(x, y)$  tunnetaan. Yhtälön (kk.24) termein määritetään  $f$ :n estimaatti  $g$ :stä kun on jokin tieto  $H$ :sta ja  $n$ :stä.

Vaikka yhtälö (kk.24) näyttää yksinkertaiselta,  $f$ :n elementtien suora laskenta on monumentaalinen tehtävä käytännönkokoisilla kuvilla. Esimerkiksi, joss  $M = N = 512$ , niin  $H$ :n koko on  $262.144 \times 262.144$ . Tällöin  $f$ :n suora laskenta vaatisi 262.144 samanaikaisen lineaarisen yhtälön ratkaisemisen. Onneksi tehtävän kompleksisuutta voidaan pienentää merkittävästi käyttämällä hyväksi  $H$ :n kierto-ominaisuutta.

## KIERTO- JA LOHKO-KIERTOMATRIISIEN DIAGONALISOINTI

Tässä jaksossa osoitetaan, että yhtälö (kk.24) voidaan ratkaista laskennallisesti helpommalla diagonalisoimalla matriisi  $H$ . Menetelmän selityksen helpottamiseksi käsitellään ensin kiertomatriisia ja sen jälkeen laajennetaan se koskemaan myös lohko-kiertomatriisia.

### KIERTOMATRIISI

Tarkastellaan  $M \times M$  kiertomatriisia  $H$ , jonka muoto on

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(5) & h_e(4) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(5) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_e(5) & h_e(4) & h_e(3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.27})$$

Määritellään aluksi skalaarifunktio  $\lambda(k)$  ja vektori  $w(k)$

$$\lambda(k) = h_e(0) + h_e(M-1)e^{j2\pi k/M} + h_e(M-2)e^{j2\pi 2k/M} + \cdots + h_e(1)e^{j2\pi(M-1)k/M} \quad (\text{kk.28})$$

ja

$$w(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi k/M} \\ e^{j2\pi 2k/M} \\ \vdots \\ e^{j2\pi (M-1)k/M} \end{bmatrix} \quad (\text{kk.29})$$

jossa  $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Voidaan osoittaa, että

$$Hw(k) = \lambda(k)w(k) \quad (\text{kk.30})$$

Yhtälö osoittaa, että  $w(k)$  on kiertomatriisin  $H$  ominaisvektorit ja  $\lambda(k)$  vastaavat ominaisarvot. Seuraavaksi muodostetaan  $M \times M$  matriisi  $W$   $H$ :n  $M$ :stä ominaisvektorista

$$W = [w(0) \quad w(1) \quad w(2) \cdots w(M-1)] \quad (\text{kk.31})$$

$W$ :n  $ki$ :s elementti  $W(k, i)$  on

$$W(k, i) = e^{j2\pi ki/M} \quad (\text{kk.32})$$

jossa  $k, i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Kompleksisen eksponenttitermin ortogonaalisuus sallii kirjoittaa käänteisen matriisin  $W^{-1}$ , jonka  $ki$ :s elementti  $W^{-1}(k, i)$  on

$$W^{-1}(k, i) = \frac{1}{M} e^{-j2\pi ki/M} \quad (\text{kk.33})$$

Yhtälöistä (kk.28) ja (kk.33) saadaan

$$W W^{-1} = W^{-1}W = I \quad (\text{kk.34})$$

jossa  $I$  on  $M \times M$  yksikkömatriisi. Käänteisen matriisin olemassaolon merkitys on siinä, että se takaa  $W$ :n sarakkeiden olevan lineaarisesti riippumattomia. Matriisien teorian mukaan  $H$  voidaan esittää muodossa

$$H = W D W^{-1} \quad (\text{kk.35})$$

tai

$$D = W^{-1} H W \quad (\text{kk.36})$$

jossa  $D$  on lävistämatriisi, jonka alkio  $D(k, k)$  on  $H$ :n ominaisarvo  $\lambda(k)$ .

$$D(k, k) = \lambda(k) \quad (\text{kk.37})$$

Yhtälön (kk.36) mukaan  $H$  voidaan diagonalisoida matriisella  $W^{-1}$  ja  $W$ .

## LOHKO-KIERTOMATRIISI

Lohko-kiertomatriisin diagonalisointi muodostetaan seuraavasti. Ensiksi

$$w_M(i, m) = e^{j2\pi im/M} \quad (\text{kk.38})$$

ja

$$w_N(k, n) = e^{j2\pi kn/N} \quad (\text{kk.39})$$

Perustuen näihin merkintöihin, määritellään matriisi  $W$ , jonka koko on  $MN \times MN$ . Matriisi  $W$  muodostuu  $M^2$ :stä  $N \times N$  kokoisesta osiosta.  $W$ :n  $im$ :s osio on

$$W(i, m) = w_N(i, m)W_N \quad (\text{kk.40})$$

jossa  $i, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ .  $W_N$  on  $N \times N$  matriisi, jonka elementit ovat

$$W_N(k, n) = w_N(k, n) \quad (\text{kk.41})$$

jossa  $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Myös käänteisen matriisin  $W^{-1}$  koko on  $MN \times MN$  ja siinä on  $M^2$  osiota, joiden koko on  $N \times N$ . Käänteisen matriisin  $W^{-1}$   $im$ :s osio  $W^{-1}(i, m)$  on

$$W^{-1}(i, m) = \frac{1}{M} w_M^{-1}(i, m) W_N^{-1} \quad (\text{kk.42})$$

jossa  $w_M^{-1}(i, m)$  on

$$w_M^{-1}(i, m) = e^{-j2\pi im/M} \quad (\text{kk.43})$$

jossa  $i, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Matriisin  $W_N^{-1}$  elementit ovat

$$W_N^{-1}(k, m) = \frac{1}{N} w_N^{-1}(k, n) \quad (\text{kk.44})$$

jossa

$$w_N^{-1}(k, n) = e^{-j2\pi kn/N} \quad (\text{kk.45})$$

jossa  $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Sijoittamalla  $W$  ja  $W^{-1}$  voidaan todeta, että

$$W W^{-1} = W^{-1} W = I \quad (\text{kk.46})$$

jossa  $I$  on  $MN \times MN$  yksikkömatriisi. Kiertomatriisin tapauksen tuloksesta ja jos  $H$  on lohko-kiertomatriisi, voidaan osoittaa, että

$$H = W D W^{-1} \quad (\text{kk.47})$$

tai

$$D = W^{-1} H W \quad (\text{kk.48})$$

jossa  $D$  on lävistäjämatriisi, jonka elementit  $D(k, k)$  ovat sukua täydennetyn funktion  $f_e(x, y)$  Fourier-muunnokselle. Lisäksi  $H$ :n transpoosi  $H^T$  on

$$H^T = WD^* W^{-1} \quad (\text{kk.49})$$

jossa  $D^*$  on matriisin  $D$  kompleksikonjugaatti.

### DIAGONALISOINNIN VAIKUTUS MUOKKAUTUMISMALLIIN

Matriisi  $H$  on yhtälön (kk.43) diskreetissä yksi-ulotteisessa tapauksessa kiertävä, jolloin se voidaan muokata yhtälön (kk.35) muotoon. Tällöin yhtälö (kk.17) saadaan muotoon

$$g = WDW^{-1}f \quad (\text{kk.50})$$

Järjestämällä yhtälö (kk.50) uudelleen, saadaan

$$W^{-1}g = DW^{-1}f \quad (\text{kk.51})$$

Tulo  $W^{-1}f$  on  $M$  ulotteinen pystyvektori. Yhtälöstä (kk.33) ja  $f$ :n määritelmän perusteella tulon  $W^{-1}f$ :n  $k$ :s elementti  $F(k)$  on

$$F(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f_e(i) e^{-j2\pi ki/M} \quad (\text{kk.52})$$

jossa  $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Yhtälö (kk.52) voidaan tunnistaa täydennetyn funktion  $f_e(x)$  diskreetiksi Fourier-muunnokseksi. Toisin sanoen  $f$ :n kertominen  $W^{-1}$ :llä tuottaa vektorin, jonka elementteinä on  $f$ :n Fourier-muunnoksen komponentit. Vastaavasti  $W^{-1}g$  tuottaa  $g$ :n Fourier-muunnoksen  $G(k)$ , jossa  $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ .

Seuraavaksi tutkitaan matriisia  $D$  yhtälössä (kk.51). Aikaisemmin on näytetty, että matriisin  $D$  päälävistäjän alkiot ovat kiertomatriisi  $H$ :n ominaisarvot. Nämä ominaisarvot on annettu yhtälössä (kk.28), jotka käyttäen tosiasiaa

$$e^{j2\pi(M-i)k/M} = e^{-j2\pi ik/M} \quad (\text{kk.53})$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \lambda(k) = & h_e(0) + h_e(1)e^{-j2\pi k/M} + h_e(2)e^{-j2\pi 2k/M} + \\ & \dots + h_e(M-1)e^{-j2\pi(M-1)k/M} \end{aligned} \quad (\text{kk.54})$$

Yhtälöistä (kk.37) ja (kk.54)

$$D(k, k) = \lambda(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_e(i) e^{-j2\pi ki/M} \quad (\text{kk.55})$$

jossa  $k = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ . Yhtälön (kk.55) oikea puoli on  $MH(k)$ , jossa  $H(k)$  on täydennetyin funktion  $h_e(x)$  diskreetti Fourier-muunnos. Tällöin

$$D(k, k) = MH(k) \quad (\text{kk.56})$$

Nämä muunnokset voidaan yhdistää. Koska  $D$  on lävistämatriisi,  $D$ :n tulo minkä tahansa vektorin kanssa kertoo vektorin jokaisen elementin yksittäisellä  $D$ :n lävisäjän elementillä. Yhtälössä (kk.51) matriisimuoto voidaan supistaa yksi-ulotteisen Fourier-muunnoksen termiltä tuloksi. Toisin sanoen

$$G(k) = MH(k)F(k) \quad (\text{kk.57})$$

jossa  $k = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ,  $G(k)$  on vektorin  $W^{-1}g$  elementit ja  $MH(k)F(k)$  vektorin  $DW^{-1}f$  elementit. Yhtälön (kk.57) oikea puoli on funktioitten  $f_e(x)$  ja  $h_e(x)$  konvoluutio taajuustasossa. Laskennallisesti tämä tulos on merkittävästi yksinkertaisempi, koska  $G(k)$ ,  $H(k)$  ja  $F(k)$  ovat  $M$ :n näytteen diskreettejä Fourier-muunnoksia, jotka voidaan laskea FFT algoritmia käyttäen.

Edellä kuvatus menetelmä johtaa samanlaisiin tuloksiin 2-ulotteisessa muokkautumismallissa. Kertomalla yhtälön (kk.24) molemmat puolet  $W^{-1}$ :llä ja käyttämällä yhtälöitä (kk.46) ja (kk.47), saadaan

$$W^{-1}g = D W^{-1}f + W^{-1}n \quad (\text{kk.58})$$

jossa  $W^{-1}$  on  $MN \times MN$  matriisi, jonka alkiot saadaan yhtälöstä (kk.42),  $D$  on  $MN \times MN$  lävistämatriisi,  $H$  on yhtälössä (kk.51) määritelty  $MN \times MN$  lohko-kiertomatriisi ja  $f$  ja  $g$  ovat  $MN$  ulotteisia vektoreita, jotka on muodostettu pinomalla funktioitten  $f_e(x, y)$  ja  $g_e(x, y)$  rivejä.

Yhtälön (kk.58) vasen puoli on  $MN \times 1$  ulotteinen vektori. Merkitään sen alkioita  $G(0, 0)$ ,  $G(0, 1)$ ,  $\dots$ ,  $G(0, N - 1)$ ;  $G(1, 0)$ ,  $G(1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $G(1, N - 1)$ ;  $\dots$ ;  $G(M - 1, 0)$ ,  $G(M - 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $G(M - 1, N - 1)$ . Voidaan osoittaa, että

$$G(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} g_e(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (\text{kk.59})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  ja  $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Yhtälö (kk.59) on  $g_e(x, y)$ :n 2-ulotteinen Fourier-muunnos. Toisin sanoen  $W^{-1}g$ :n alkiot vastaavat pinottujen rivien Fourier-muunnosmatriisia, jonka alkioina on  $G(u, v)$ , jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$  ja  $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Vastaavasti vektorit  $W^{-1}f$  ja  $W^{-1}n$  ovat  $MN$  ulotteisia ja niiden alkioina ovat  $F(u, v)$ :n ja  $N(u, v)$ :n alkiot, joissa

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_e(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (\text{kk.60})$$

ja

$$N(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta_e(x,y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (\text{kk.61})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Lopuksi lävistäjämatriisin  $D$  alkiot ovat täydennetty impulssivasteen  $h_e(x,y)$  Fourier-muunnos

$$H(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} h_e(x,y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (\text{kk.62})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Matriisin  $D$   $MN$  alkiota ovat  $MN$ :llä kerrotut  $H(0, 0), H(0, 1), \dots, H(0, N-1); G(1, 0), G(1, 1), \dots, G(1, N-1); \dots; G(M-1, 0), G(M-1, 1), \dots, G(M-1, N-1)$ . Lävistäjän ulkopuolella olevien alkioiden arvo on nolla. Joten

$$D(k,i) = \begin{cases} MNH\left(\left[\frac{k}{N}\right], k \bmod N\right) & \text{kun } i = k \\ 0 & \text{kun } i \neq k \end{cases} \quad (\text{kk.63})$$

jossa  $[c]$  on käytetty merkitsemään suurinta kokonaislukua, joka on pienempi kuin  $c$  ja  $k \bmod N$  jakojäännös  $k/N$ :stä. Yhtälöitä (kk.59) ... (kk.62) voidaan käyttää osoittamaan, että yhtälön (kk.58) yksittäiset alkiot sitoo yhtäläisyys

$$G(u,v) = MNH(u,v)F(u,v) + N(u,v) \quad (\text{kk.64})$$

jossa  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Termi  $MN$  on skaalaustekijä, joka merkinnällisesti voidaan sisällyttää  $H(u,v)$ :hen. Tällöin yhtälöt (kk.63) ja (kk.64) voidaan kirjoittaa muotoon

$$D(k,i) = \begin{cases} H\left(\left[\frac{k}{N}\right], k \bmod N\right) & \text{kun } i = k \\ 0 & \text{kun } i \neq k \end{cases} \quad (\text{kk.65})$$

jossa  $k, i = 0, 1, 2, \dots, MN-1$  ja

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v) \quad (\text{kk.66})$$

Yhtälöiden (kk.64) ja (kk.66) merkitys on siinä, että yhtälön (kk.24) laaja järjestelmä voidaan supistaa muutaman  $M \times N$  kokoisen Fourier-muunnoksen laskentaan. Jos  $M$  ja  $N$  ovat kahden potensseja, laskentaan voidaan käyttää FFT:tä.

Yhtälön (kk.24) mallia käytetään jatkossa perustana johdettaessa useita kuvan korjausmenetelmiä. Tämän jälkeen matriisimuodossa olevat tulokset yksinkertaistetaan edellä kuvatulla konseptilla. Mallin kannalta on oleellista, että se johdettiin olettamalla

muokkautumisen olevan lineaarisen ja paikka-invariantin, sekä kaikki kuvat ovat täydennettyjä jaksollisia funktioita.

Yhtälö (kk.66) voitaisiin kirjoittaa suoraan yhtälöstä (kk.15) konvoluutioteoreeman perusteella. Tavoitteena oli kuitenkin osoittaa, että sama tulos voidaan saada matriiseilla. Näin tekemällä on johdettu joukko tärkeitä matriisien ominaisuuksia, joita voidaan käyttää jatkossa kehitettäessä kuvan korjausmenetelmiä.

## ALGEBRALLISET MENETELMÄT KUVAN KORJAAMISEKSI

Kuvan korjaamisen perusidea on palauttaa alkuperäinen kuva  $f$  muokkautuneesta kuvasta  $g$ , kun on jokin tieto  $H$ :sta ja  $n$ :stä. Olettamalla, että muokkautuminen voidaan mallintaa yhtälöllä (kk.24), jolloin voidaan mallintaa joukko kuvan korjausongelmia lineaarisilla yhtälöillä.

Keskeistä algebrallisessa lähestymistavassa on etsiä kuvan  $f$  estimaatti  $\hat{f}$ , joka minimoi jonkin etukäteen määritellyn virhetekijän. Yksinkertaisuuden vuoksi keskitytään pienimmän neliön kriteerin funktioihin. Tällä valinnalla on lisäksi etuna, että se johtaa useisiin keskeisiin hyvin tunnettuihin korjausmenetelmiin. Nämä menetelmät voidaan jakaa rajoitettuihin tai rajoittamattomiin menetelmiin.

## RAJOITTAMATON KORJAAMINEN

Yhtälössä (kk.24) kohinatermi muokkautumismallissa on

$$n = g - Hf \quad (\text{kk.67})$$

Mikäli  $n$ :stä ei ole mitään tietoa, tarkoituksenmukainen menetelmä on etsiä sellainen  $\hat{f}$ , että  $H\hat{f}$  aproksimoi  $g$ :tä pienimmän neliön mielessä olettamalla kohinan normi niin pieneksi kuin mahdollista. Toisin sanoen halutaan löytää sellainen  $\hat{f}$ , että

$$\|n\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2 \quad (\text{kk.68})$$

on minimissään, jossa määritelmän mukaan

$$\|n\|^2 = n^T n \quad \text{ja} \quad \|g - H\hat{f}\|^2 = (g - H\hat{f})^T (g - H\hat{f}) \quad (\text{kk.69})$$

ovat  $n$ :n ja  $(g - H\hat{f})$  kakkosnormit. Yhtälö (kk.69) mahdollistaa tarkastella ongelmaa kriteerifunktion minimoimisena

$$J(\hat{f}) = \|g - H\hat{f}\|^2 \quad (\text{kk.70})$$

$\hat{f}$ :n suhteen. Paitsi vaatimusta, että  $\hat{f}$  minimoi yhtälön (kk.70), sitä ei ole rajoitettu millään muulla tavoin. Yhtälön (kk.70) minimointi on suoraviivaista.  $J$  yksinkertaisesti derivoidaan  $\hat{f}$ :n suhteen ja tulosvektori asetetaan nolaksi, jolloin

$$\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = 0 = -2H^T(g - H\hat{f}) \quad (\text{kk.71})$$

Ratkaisemalla yhtälö (kk.71)  $\hat{f}$  :n suhteen, saadaan

$$\hat{f} = H^{-1}(H^T)^{-1}H^Tg \quad (\text{kk.72})$$

Asettamalla  $M = N$  niin, että  $H$  on neliömatriisi ja olettamalla  $H^{-1}$  olemassaolo, yhtälö (kk.72) supistuu muotoon

$$\begin{aligned} \hat{f} &= H^{-1}(H^T)^{-1}H^Tg \\ &= H^{-1}g \end{aligned} \quad (\text{kk.73})$$

## RAJOITETTU KORJAAMINEN

Tässä jaksossa keskitytään pienimmän neliön korjausongelmaan yhteen muotoa  $\|Q\hat{f}\|^2$  olevan minimointifunktioon, jossa  $Q$  on  $f$ :n lineaarinen operaattori. Tarkoituksena on rajoittaa yhtälöä  $\|n\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2$ . Tämä lähestymistapa mahdollistaa merkittävän joustavuuden korjausprosessissa, sillä eri  $Q$ :t johtavat erilaisiin ratkaisuihin. Tämä rajoitus on sopuisuudessa yhtälön (kk.24) mallin kanssa.

Rajoituksen lisäys minimointiongelmaan voidaan käsitellä vaikeuksitta käyttäen Lagrangen kertoja-menetelmää. Menetelmässä rajoitus on muodossa  $\alpha(\|g - H\hat{f}\|^2 - \|n\|^2)$  täydennettynä funktiolla  $\|Q\hat{f}\|^2$ . Toisin sanoen etsitään  $\hat{f}$ , joka minimoi kriteerifunktion

$$J(\hat{f}) = \|Q\hat{f}\|^2 + \alpha(\|g - H\hat{f}\|^2 - \|n\|^2) \quad (\text{kk.74})$$

jossa  $\alpha$  on Lagrangen kertojaksi sanottu vakio. Rajoituksen lisäämisen jälkeen minimointi suoritetaan tavalliseen tapaan.

Derivoimalla yhtälö (kk.74)  $\hat{f}$  :n suhteen ja asettamalla tulosvektori nolllaksi, saadaan

$$\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = 0 = 2Q^TQ\hat{f} - 2\alpha H^T(g - H\hat{f}) \quad (\text{kk.75})$$

Yhtälö (kk.75) ratkaistaan  $\hat{f}$  :n suhteen, jolloin

$$\hat{f} = (H^TH + \gamma Q^TQ)^{-1}H^Tg \quad (\text{kk.76})$$

jossa  $\gamma = 1/\alpha$ . Tämä vakio on asetettava sellaiseksi, että rajoitus on tyydyttävä. Tähän ongelmaan palataan myöhemmin. Yhtälöt (kk.73) ja (kk.76) ovat perustana kaikille korjausproseduureille seuraavassa jaksossa. Yhtälö (kk.73) johtaa perinteelliseen käänteisen



suodatuksen menetelmään. Vastaavasti yhtälön (kk.76) yleisestä muodosta voidaan johtaa klassinen Wiener-suodatin ja muita korjaustekniikoita. Tämä voidaan tehdä yksinkertaisesti valitsemalla sopiva muunnosmatriisi  $Q$  ja käyttämällä aikaisemmin johdettuja yksinkertaistuksia.

## KÄÄNTEINEN SUODATUS

Kuvien korjaustekniikoiden johto aloitetaan rajoittamattomasta yhtälöstä (kk.73). Oletetaan, että  $M = N$  ja käytetään yhtälöä (kk.35), jolloin yhtälö (kk.73) saa muodon

$$\begin{aligned}\hat{f} &= H^{-1}g = (WDW^{-1})^{-1}g \\ &= WD^{-1}W^{-1}g\end{aligned}\tag{kk.77}$$

Kertomalla yhtälön (kk.77) molemmat puolet vasemmalta  $W^{-1}$ :llä, saadaan

$$W^{-1}\hat{f} = D^{-1}W^{-1}g\tag{kk.78}$$

Yhtälön (kk.78) alkioita voidaan kirjoittaa muotoon

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}\tag{kk.79}$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Yhtälön (kk.65) mukaan  $H(u, v)$  on skaalattu tekijällä  $N^2$  ja koska  $D$  on lävistämatriisi, sen käänteismatriisi voidaan määrätä helposti.

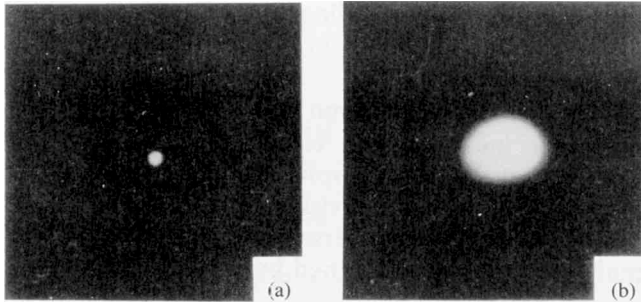
Yhtälön (kk.79) kuvan korjausmenetelmää sanotaan yleisesti käänteiseksi suodatuksiksi. Nimitys on perusteltu ajattelemalla  $H(u, v)$  suodattimen siirtofunktiona, jolla  $F(u, v)$  kerrotaan ja saadaan muokkautunut kuva  $g(u, v)$ . Yhtälön (kk.79) jakolasku voidaan nähdä tällöin käänteisenä suodatuksena. Korjattu kuva määrätään käänteisellä Fourier-muunnoksella

$$\begin{aligned}\hat{f}(x,y) &= F^{-1}[\hat{F}(u,v)] \\ &= F^{-1}[G(u,v) / H(u,v)]\end{aligned}\tag{kk.80}$$

jossa  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Menetelmä toteutetaan tavallisesti FFT algoritmilla.

Yhtälö (kk.80) voi johtaa laskennallisiin ongelmiin, jos  $H(u, v)$  menee nolaksi tai hyvin pieneksi jollakin kiinnostavalla  $uv$ -tason osalla. Jos  $H(u, v)$ :n nollat sijaitsevat muutamassa  $uv$ -tason pisteessä, niiden vaikutus voidaan yleensä mitätöidä laskettaessa  $\hat{F}(u,v)$ :tä ilman, että se vaikuttaa merkittävästi lopputulokseen.

Paljon suuremman ongelman muodostaa kohina. Sijoittamalla yhtälö (kk.66) yhtälöön (kk.79), saadaan



Kuva kk.2 Piste muokkaaminen siirtofunktion  $H(u, v)$  määrittämiseksi.

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (\text{kk.81})$$

Yhtälö osoittaa, että jos  $H(u, v)$  on nolla tai tulee hyvin pieneksi, niin termi  $N(u, v)/H(u, v)$  voi dominoida korjaustulosta  $F^{-1}[\hat{F}(u, v)]$ . Käytännössä  $H(u, v)$  pienenee nopeasti etäisyyden origosta lisääntyessä. Kohinatermi pienenee tavallisesti paljon hitaammin. Tässä tilanteessa kohtuullinen tulos saavutetaan suorittamalla korjaus rajoitetulla alueella lähellä origoa jotta voidaan välttää  $H(u, v)$ :n pienet arvot.

### Esimerkki

Kuvassa kk.2 (a) pistemäinen kuva  $f(x, y)$  ja kuvassa kk.2 (b) on muokkautunut kuva  $g(x, y)$ , joka on saatu pehmentämällä kuva  $f(x, y)$ . Pitämällä pistelähdettä impulssifunktion likiarvona, saadaan

$$\begin{aligned} G(u, v) &= H(u, v)F(u, v) \\ &\approx H(u, v) \end{aligned}$$

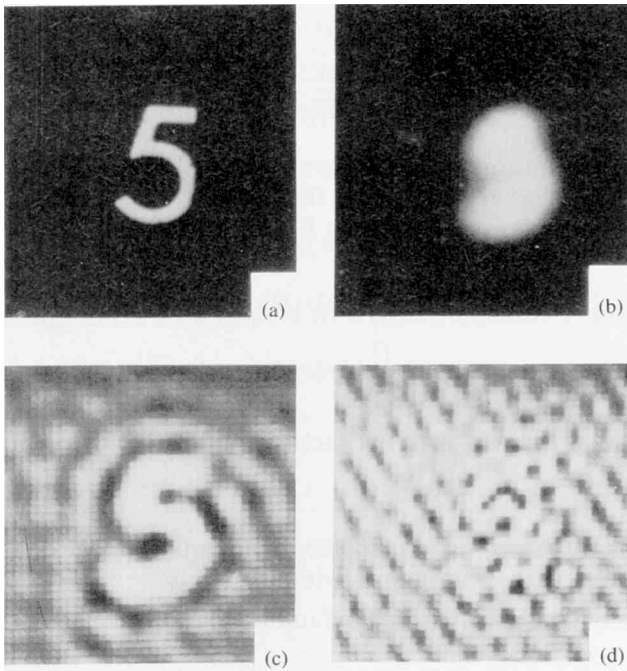
koska  $F[\delta(x, y)] = 1$ . Yhtälön mukaan siirtofunktiota  $H(u, v)$  voidaan aproksimoida muokkautuneen kuvan Fourier-muunnoksella. Tunnetun funktion muokkaaminen siirtofunktion  $H(u, v)$  aproksimoimiseksi on käyttökelpoinen menetelmä. Sitä voidaan usein käyttää kokeile-ja-virhe lähestymistapana kuvan korjaamiseen tapauksissa, joissa muokkausfunktio  $H(u, v)$  ei ole etukäteen tiedossa.

Tulos, jossa edellä kuvatus kaltaista muokkautumisfunktiota on sovellettu ideaaliseen kuvaan kk.3 (a), on kuvassa kk.3 (b). Korjattu kuva kk.3 (c) on saatu soveltamalla yhtälöä (kk.80) niin, että  $u$  ja  $v$  on rajoitettu riittävän lähelle origoa jotta vältettäisiin  $H(u, v)$ :n liian pienet arvot. Tulos, jossa on käytetty laajaa naapurustoa, on kuvassa kk.3 (d). Kuvassa nähdään selvästi ongelma, joka johtuu funktion  $H(u, v)$  menemisestä liian pieneksi.

Jos  $H(u, v)$ ,  $G(u, v)$  ja  $N(u, v)$  ovat tunnetut, käänteinen suodatusfunktio voidaan johtaa suoraan yhtälöstä (kk.66).

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (\text{kk.82})$$

Lisänä esimerkin esittämään  $H(u, v)$ :n potentiaalsiin ongelmiin, tämän lähestymistavan ongelmana on, että kohina on harvoin tunnettu  $N(u, v)$ :n laskemiseksi.



Kuva kk.3 Esimerkki kuvan korjaamisesta käänteisellä suodatuksella. Alkuperäinen kuva (a), muokkautunut kuva (b), tulos korjauksesta, jossa on käytetty pieniä taajuuksia pienten arvojen vaikutuksen eliminoinniseksi (c) ja tulos käytettäessä laajaa naapurustoa.

### SUORAVIIVAISEN LIIKKEEN AIHEUTTAMAN MUOKKAUTUMISEN POISTO

On olemassa joitakin käytännöllisiä tapauksia, joissa  $H(u, v)$  voidaan määrittää analyttisesti mutta ratkaisulla on nolla arvoja kiinnostavalla taajuuksialueella. Edellä tuli jo esille ongelmat, jotka aiheutuvat liian pienistä  $H(u, v)$ :n arvoista. Seuraavassa tarkastellaan suoraviivaisen liikkeen aiheuttamia korjausongelmia. Ongelmaa tarkastellaan sen käytännön merkityksen takia ja koska se soveltuu hyvin analyttisesti ratkaistavaksi. Suoraviivaisen liikkeen korjaus osoittaa lisäksi kuinka siirtofunktion  $H(u, v)$  nollat voidaan laskennallisesti käsitellä. Nämä aiheet ovat tärkeitä, sillä ne nousevat usein esiin muuntotyyppisten muokkautumisten korjauksien yhteydessä.

Oletetaan, että kuva  $f(x, y)$  liikkuu kuvataso suunnassa ja että  $x_0(t)$  ja  $y_0(t)$  ovat liikkeen aikariippuvia komponentteja  $x$ - ja  $y$ -suuntiin. Kokonaisvalotus jokaisessa tallennusmedian (esimerkiksi filmi) pisteessä on saatu tässä tapauksessa integroimalla hetkelliset valotukset sen ajan yli, jonka suljin on auki. Oletetaan, että suljimen avautuminen ja sulkeutuminen tapahtuvat ajattomasti ja optinen kuvausprosessi on täysin riippumaton liikkeestä. Silloin, jos  $T$  on valotuksen kesto, näistä seuraa, että

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \quad (\text{kk.83})$$

jossa  $g(x, y)$  on muokkautunut kuva. Yhtälön (kk.83) Fourier-muunnos on

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \right] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \end{aligned} \quad (\text{kk.84})$$

Vaihtamalla integrointien järjestys, voidaan yhtälö (kk.85) kirjoittaa muotoon

$$G(u, v) = \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \quad (\text{kk.85})$$

Ulompien sulkujen sisällä oleva termi on funktion  $f[x - x_0(t), y - y_0(t)]$  Fourier-muunnos. Yhtälön (km.32) mukaan yhtälö (kk.85) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \end{aligned} \quad (\text{kk.86})$$

jossa viimeinen askel seuraa siitä, että  $F(u, v)$  on riippumaton ajasta  $t$ . Määrittelemällä

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \quad (\text{kk.87})$$

yhtälö (kk.86) voidaan kirjoittaa uudelleen tuttuun muotoon

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (\text{kk.88})$$

Jos liikemuuttujat  $x_0(t)$  ja  $y_0(t)$  tunnetaan, siirtofunktio  $H(u, v)$  voidaan määrätä suoraan yhtälöstä (kk.87). Menetelmän valottamiseksi oletetaan, että kuva liikkuu suoraviivaisesti vain  $x$  suuntaan nopeudella  $x_0(t) = at/T$ . Kun  $t = T$ , kuva on siirtynyt matkan  $a$ . Kun  $y_0(t) = 0$ , yhtälö (kk.87) on

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T e^{-j2\pi u x_0(t)} dt \\ &= \int_0^T e^{-j2\pi u at/T} dt \\ &= \frac{T}{\pi u a} \sin(\pi u a) e^{-j\pi u a} \end{aligned} \quad (\text{kk.89})$$

Ilmeisesti  $H$  menee nolaksi  $u$ :n arvoilla  $u = n/a$ , jossa  $n$  on kokonaisluku.

Kun  $f(x, y)$  on nolla (tai tunnettu) välin  $0 \leq x \leq L$  ulkopuolella, yhtälön (kk.89) voidaan välttää ja kuva palauttaa täysin, jos  $g(x, y)$  tunnetaan tällä välillä. Koska  $y$  on aika-invariantti, tämä muuttuja voidaan unohtaa väliaikaisesti, jolloin yhtälö (kk.83) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^T f\left[x - x_0(t)\right] dt \\ &= \int_0^T f\left(x - \frac{at}{T}\right) dt \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (\text{kk.90})$$

Sijoittamalla  $\tau = x - at/T$  yhtälöön (kk.90) ja hylkäämällä skaalaustekijä, saadaan

$$g(x) = \int_{x-a}^x f(\tau) d\tau \quad (\text{kk.91})$$

Tämän jälkeen integroimalla  $x$ :n suhteen (käyttämällä Leibnizin sääntöä)

$$g'(x) = f(x) - f(x-a) \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{kk.92})$$

tai

$$f(x) = g'(x) + f(x-a) \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{kk.93})$$

Seuraavassa johdossa mukava oletus on, että  $L = Ka$ , jossa  $K$  on kokonaisluku. Tällöin muuttuja  $x$  voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = z + ma \quad (\text{kk.94})$$

jossa  $z$  saa arvot välillä  $[0, a]$  ja  $m$  on  $x/a$ :n kokonaisosa. Esimerkiksi, jos  $a = 2$  ja  $x = 3,5$ , niin silloin  $m = 1$  ja  $z = 1,5$ . Selvästi  $z + ma = 3,5$  kuten tarvitaankin. Lisäksi koska  $L = Ka$ , indeksi  $m$  voi saada arvot  $0, 1, 2, \dots, K-1$ . Esimerkiksi kun  $x = L$ , silloin  $z = a$  ja  $m = K-1$ .

Sijoittamalla yhtälö (kk.94) yhtälöön (kk.93), saadaan

$$f(x+ma) = g'(z+ma) + f[x+(m-1)a] \quad (\text{kk.95})$$

Seuraavaksi merkitsemällä  $\phi(z)$ :lla sitä osaa näkymästä, joka liikkuu välin  $0 \leq z < a$  valotuksen aikana

$$\phi(z) = f(z-a) \quad 0 \leq z < a \quad (\text{kk.96})$$

Yhtälö (kk.95) voidaan ratkaista rekursiivisesti  $\phi(z)$ :n suhteen. Kun  $m = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= g'(z) + f(z-a) \\ &= g'(z) + \phi(z) \end{aligned} \quad (\text{kk.97})$$

Kun  $m = 1$ , yhtälö (kk.95) saa muodon

$$f(z+a) = g'(z+a) + f(z) \quad (\text{kk.98})$$

Sijoittamalla yhtälö (kk.97) yhtälöön (kk.98), saadaan

$$f(z+a) = g'(z+a) + g'(z) + \phi(z) \quad (\text{kk.99})$$

Seuraavassa vaoheessa asetetaan  $m = 2$ , jolloin saadaan

$$f(z+2a) = g'(z+2a) + f(z+a) \quad (\text{kk.100})$$

tai sijoittamalla yhtälö (kk.98)  $f(z + a)$ :n tilalle

$$f(z + 2a) = g'(z + 2a) + g'(z + a) + g'(z) + \phi(z) \quad (\text{kk.101})$$

Jatkamalla prosessia, saadaan yhtälö

$$f(z + ma) = \sum_{k=0}^m g'(z + ka) + \phi(z) \quad (\text{kk.102})$$

Kuitenkin kun  $x = z + ma$ , yhtälö (kk.102) voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x) = \sum_{k=0}^m g'(x - ka) + \phi(x - ma) \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{kk.103})$$

Koska  $g(x)$  tunnetaan, ongelma supistuu  $\phi(x)$ :n arviointiin.

Yksi tapa ratkaista funktio suoraan muokkautuneesta kuvasta on seuraava. Ensiksi todetaan, että  $x$  muuttuu välillä 0 ja  $L$ ,  $m$  välillä 0 ja  $K - 1$ .  $\phi$ :n argumentti on  $(x - ma)$ , joka on aina välillä  $0 \leq (x - ma) \leq a$ , jolloin  $\phi$  toistetaan  $K$  kertaa laskettaessa  $f(x)$  välillä  $0 \leq x \leq L$ . Seuraavaksi määrittelemällä

$$\bar{f}(x) = \sum_{j=0}^m g'(x - ja) \quad (\text{kk.104})$$

voidaan yhtälö (kk.103) kirjoittaa uudelleen muotoon

$$\phi(x - ma) = f(x) - \bar{f}(x) \quad (\text{kk.105})$$

Laskemalla yhtälön (kk.105) vasen ja oikea puoli välillä  $ka \leq x \leq (k + 1)a$  ja lisäämällä tulokset kun  $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ , saadaan

$$K\phi(x) = \sum_{k=0}^{K-1} f(x + ka) - \sum_{k=0}^{K-1} \bar{f}(x + ka) \quad 0 \leq x \leq a \quad (\text{kk.106})$$

jossa  $m = 0$ , koska  $0 \leq x \leq a$ . Jakamalla yhtälön molemmat puolet  $K$ :lla, saadaan

$$\phi(x) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f(x + ka) - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \bar{f}(x + ka) \quad (\text{kk.107})$$

Yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi on tuntematon. Kuitenkin suurilla  $K$ :n arvoilla se lähestyy  $f$ :n keskiarvoa. Tällöin tämä termi voidaan merkitä vakioksi, jolloin saadaan likiarvo

$$\phi(x) \approx A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \bar{f}(x + ka) \quad 0 \leq x \leq a \quad (\text{kk.108})$$

tai

$$\phi(x - ma) \approx A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \bar{f}(x + ka - ma) \quad 0 \leq x \leq a \quad (\text{kk.109})$$

Sijoittamalla yhtälö (kk.104) yhtälöön (kk.109), saadaan

$$\begin{aligned} \phi(x - ma) &\approx A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^k g'(x + ka - ma - ja) \\ &\approx A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^k g'[(x - ma + (k - j)a)] \end{aligned} \quad (\text{kk.110})$$

Yhtälöistä (kk.104) ja (kk.105) saadaan lopullinen tulos

$$f(x) \approx A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^k g'(x + ka - ma - ja) + \sum_{j=0}^m g'(x - ja) \quad (\text{kk.111})$$

kun  $0 \leq x \leq L$ . Ottamalla jälleen mukaan muuttuja  $y$ , yhtälön muoto on

$$f(x, y) \approx A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^k g'(x + ka - ma - ja, y) + \sum_{j=0}^m g'(x - ja, y) \quad (\text{kk.112})$$

kun  $0 \leq x, y \leq L$ . Kuten aikaisemminkin, funktio  $f(x, y)$  oletetaan neliökuvaksi. Vaihtamalla muuttujat  $x$  ja  $y$  yhtälön oikealla puolella, saadaan yhtälö tasaiselle suoraviivaiselle liikkeelle  $y$  suuntaan valotuksen aikana. Edellä esitettyä menetelmää käyttäen voidaan johtaa yhtälöt samanaikaiselle liikkeelle sekä  $x$  että  $y$  suuntaan.

### Esimerkki

Kuvassa kk.4 (a) on tasaisen suoraviivaisen liikkeen muokkaama kuva. Liikkeen pituus on 1/8 kuvan leveydestä. Kuvassa kk.4 (b) on tulos sovellettaessa yhtälöä (kk.112), kun  $x$  ja  $y$  on vaihdettu koska liike on ollut  $y$  suuntaan. Korjatussa kuvassa esiintyvät virheet eivät ole merkittäviä.



Kuva kk.4 Tasaisen suoraviivaisen liikkeen muokkaama kuva (a) ja korjattu kuva (b). Kuvaan on sovellettu yhtälöä (kk.112).

## PIENIMMÄN KESKIMÄÄRÄISEN NELIÖN (WIENER) SUODATIN

Olkoon  $R_f$  ja  $R_n$   $f$ :n ja  $n$ :n korrelaatiomatriisit, jotka määritellään

$$R_f = E\{ff^T\} \quad (\text{kk.113})$$

ja

$$R_n = E\{nn^T\} \quad (\text{kk.114})$$

jossa  $E\{\}$  tarkoittaa odotusarvoa ja  $f$  ja  $n$  ovat  $MN$  ulotteisia pystyvektoreita.  $R_f$ :n  $ij$ :s alkio on  $E\{f_i f_j\}$ , joka on  $f$ :n  $i$ :n ja  $j$ :n alkion korrelaatio. Vastaavasti  $R_n$ :n  $ij$ :s alkio on  $E\{n_i n_j\}$ , joka on  $n$ :n  $i$ :n ja  $j$ :n alkion korrelaatio. Koska  $f$ :n ja  $n$ :n alkiot ovat reaalisia,  $E\{f_i f_j\} = E\{f_j f_i\}$  ja  $E\{n_i n_j\} = E\{f_j f_i\}$ . Tämän perusteella  $R_f$  ja  $R_n$  ova reaalisia symmetrisiä matriiseja. Useimmissa kuvafunktioissa pikselien välinen korrelaatio ei ulotu 20 ... 30 pikseliä kauemmas, jolloin tyypillisessä korrelaatiomatriisissa lävistäjän alkiot poikkeavat nolasta ja sekä ylä- että alanurkan alkiot ovat nollia. Perustuen oletukseen, että minkä tahansa kahden pikselin välinen korrelaatio on pikselien välisen etäisyyden funktio eikä niiden paikan,  $R_f$ :ää ja  $R_n$ :ää voidaan aproksimoida lohko-kierto matriiseilla. Tästä syystä ne voidaan diagonalisoida matriisilla  $W$  aikaisemmin esitetyllä menetelmällä. Merkitsemällä  $A$ :lla ja  $B$ :llä matriiseja, saadaan

$$R_f = WAW^{-1} \quad (\text{kk.115})$$

ja

$$R_n = WBW^{-1} \quad (\text{kk.116})$$

Aivan kuin lävistämatriisin  $D$  alkiot suhteessa  $H = WDW^{-1}$  vastasivat lohkoalkioitten  $H$  Fourier-muunnosta, ovat  $A$  ja  $B$   $R_f$ :n ja  $R_n$ :n korrelaatioalkioiden muunnoksia. Näiden korrelaatioiden Fourier-muunnoksia sanotaan  $f_e(x, y)$ :n ja  $n_e(x, y)$ :n tehospektreiksi ja niitä merkitään  $S_f(u, v)$ :llä ja  $S_n(u, v)$ :llä jatkossa.

Määrittelemällä

$$Q^T Q = R_f^{-1} R_n \quad (\text{kk.117})$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (kk.76), saadaan

$$\hat{f} = (H^T H + \gamma R_f^{-1} R_n)^{-1} H^T g \quad (\text{kk.118})$$

Käyttäen yhtälöitä (kk.47), (kk.49), (kk.115) ja (kk.116), yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\hat{f} = (WD^* DW^{-1} + \gamma WA^{-1} BW^{-1})^{-1} WD^* W^{-1} g \quad (\text{kk.119})$$

Kertomalla molemmat puolet  $W^{-1}$ :llä ja suorittamalla yhtälön sievennys, saadaan

$$W^{-1} \hat{f} = (D^* D + \gamma A^{-1} B)^{-1} D^* W^{-1} g \quad (\text{kk.120})$$



Muistaen matriisien  $A$  ja  $B$  alkioitten merkitys, tunnistamalla sulkujen sisällä olevan lävistämatriisin ja käyttämällä aiksisemmin johdettua menetelmää, voidaan yhtälön (kk.120) alkioit kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\hat{F}(u,v) &= \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma[S_\eta(u,v)/S_f(u,v)]} \right] G(u,v) \\ &= \left[ \frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + \gamma[S_\eta(u,v)/S_f(u,v)]} \right] G(u,v)\end{aligned}\quad (\text{kk.121})$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $|H(u,v)|^2 = H^*(u,v)H(u,v)$  ja oletetaan, että  $M = N$ .

Kun  $\gamma = 1$ , yhtälön (kk.121) hakasulkeitten sisällä oleva lauseke yksinkertaistuu ns. Wiener suodattimeksi. Jos  $\gamma$  on muuttuja, yhtälöä sanotaan parametriseksi Wiener suodattimeksi. Kun kohina  $S_\eta(u, v) = 0$ , Wiener suodatin yksinkertaistuu ideaaliseksi käänteiseksi suodattimeksi, josta oli puhe jaksossa Käänteinen suodatus. Kuitenkin kun  $\gamma = 1$ , yhtälön (kk.121) ei johda optimaaliseen ratkaisuun jaksossa Rajoitettu korjaaminen käsitellyssä mielessä. Tämä johtuu siitä, että  $\gamma$  täytyy säätää täyttämään ehto  $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|n\|^2$ . Voidaan kuitenkin osoittaa, että ratkaisu  $\gamma = 1$  on optimaalinen siinä mielessä, että se minimoi odotusarvon  $E\{[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2\}$ . Tämä on selvästi tilastollinen kriteeri, joka käsittelee  $f$ :ää ja  $\hat{f}$ :a satunnaismuuttujina.

Kun  $S_f(u, v)$  ja  $S_\eta(u, v)$  ovat tuntemattomia, kuten käytännössä usein on, aproksimoimalla yhtälöä (kk.121) suhteella

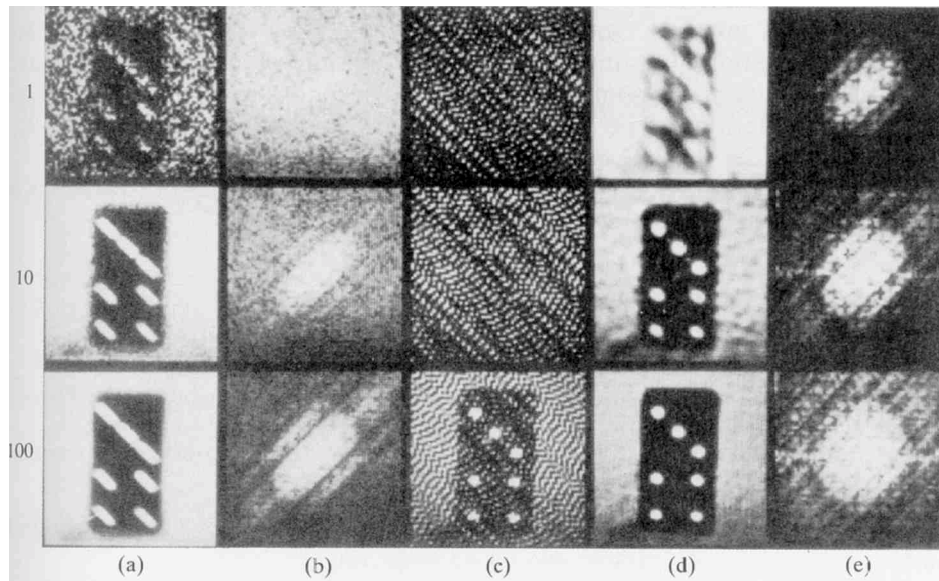
$$\hat{F}(u,v) \approx \left[ \frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K} \right] G(u,v) \quad (\text{kk.122})$$

jossa  $K$  on vakio, on joskus käyttökelpoinen. Ongelmasta miten valita optimaalinen  $\gamma$  kuvan korjaamisessa, keskustellaan enemmän jaksossa Rajoitettu pienimmän neliön korjaaminen.

### Esimerkki

Kuvassa kk.5 ensimmäisessä sarakkeessa on kolme kuvaa, joita pilaa tasainen suoraviivainen liike ( $-45^\circ$  vaakatasoon nähden) ja kohina, jonka varianssi jokaisessa kuvan pisteessä on suhteellinen pisteen kirkkauteen. Kolme kuvaa on synnytetty vaihtelemalla suhdetta niin, että maksimikirkkaus verrattuna kohina-amplitudiin on 1, 10 ja 100. Muokkautuneiden kuvien Fourier-muunnokset ovat kuvissa (b).

Koska suoraviivaisen liikkeen vaikutus voidaan ilmaista analyttisesti,  $H(u, v)$ :tä kuvaava yhtälö voidaan määrittää vaikeuksitta. Kuvassa kk.5 (c) on tulokset käytettäessä käänteistä suodatusta. Tulosta hallitsee kohina, mutta käänteinen suodatus poistaa liikkeen aiheuttaman muokkautumisen. Kuvan kk.5 (d) tulokset on saatu käänteisellä suodatuksella, jossa on käytetty parametreja  $K = 2\sigma^2$ , jossa  $\sigma^2$  on kohinan varianssi. Parannus verrattuna suoraan



Kuva kk.5 Esi-  
merkki kuvan kor-  
jaamisesta kään-  
teisellä ja Wiener-  
suodattimella.

Muokkautunut ku-  
va (a), niiden  
Fourier-muunnok-  
set (b), käänteisel-  
lä suodatuksella  
korjatut kuvat (c),  
Wiener-suodatuksella  
korjatut  
kuvat (d) ja niiden  
Fourier-muunnok-  
set (e).

käänteiseen suodatukseseen on ilmeinen, erityisesti kolmannessa tapauksessa. Kuvassa kk.5 (d) on korjatun kuvan Fourier-muunnos.

## RAJOITETTU PIENIMMÄN NELIÖN KORJAAMINEN

Edellä johdettu pienimmän keskimääräisen neliön algoritmi on tilastollinen menetelmä, koska optimaalisuuden kriteerit perustuvat kuva- ja kohinafunktioiden korrelaatiomatriiseihin. Tämä tarkoittaa, että Wiener suodatuksen tulos on optimaalinen keskimääräisessä mielessä. Tässä jaksossa johdettava menetelmä on optimaalinen kaikilla kuvilla ja siinä tarvitaan tieto ainoastaan kohinan keskiarvosta ja varianssista. Tässä ongelmassa käsitellään myös  $\gamma$ -säättämistä niin, että yhtälön (kk.76) rajoitukset täytetään.

Kuten aikaisemmin on todettu, kuvan korjaamisen ratkaisu riippuu matriisin  $Q$  valinnasta. Valitsemalla väärät lähtöarvot, tämä yhtälö johtaa ratkaisuun jossa ilmenee laaja värähtely. Siksi matriisi  $Q$  tulisi valita niin, että nämä ei toivotut ilmiöt on minimoitu. Eräs mahdollisuus on muotoilla optimaalisuuden kriteeri perustuen johonkin pehmyyden mittaan, kuten minimoimaan funktion toinen derivaatta. Jotta nähtäisiin, miten tämä kriteeri voidaan muotoilla yhtälöön (kk.76) sopivaksi, tarkastellaan aluksi 1-ulotteista tapausta.

Diskreetin funktion  $f(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ , toinen derivaatta pisteessä  $x$  voidaan aproksimoida

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \approx f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) \quad (\text{kk.123})$$

Tähän yhtälöön perustuva kriteeri voisi minimoida  $(\partial^2 f / \partial x^2)^2$  :n  $x$  yli, jolloin

$$\text{minimoi} \left\{ \sum_x [f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)]^2 \right\} \quad (\text{kk.124})$$

tai matriisimerkinnöin

$$\text{minimoi } \{f^T C^T C f\} \quad (\text{kk.125})$$

jossa

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{kk.126})$$

on pehmennysmatriisi ja  $f$  on vektori, jonka alkioina ovat  $f(x)$ :n näytteet.

Kaksiulotteisessa tapauksessa yhtälöön (kk.123) tehdään suora laajennus. Tässä tapauksessa kriteeri on

$$\text{minimoi } \left[ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{kk.127})$$

jossa derivointiyhtälö aproksimoidaan lausekkeella

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &\approx [2f(x,y) - f(x+1,y) - f(x-1,y)] \\ &\quad + [2f(x,y) - f(x,y+1) - f(x,y-1)] \\ &\approx 4f(x,y) - [f(x+1,y) + f(x-1,y) \\ &\quad + f(x,y+1) + f(x,y-1)] \end{aligned} \quad (\text{kk.128})$$

Yhtälön (kk.127) dervointifunktio on kappaleessa Kuvamuunnokset käsitelty Laplace operaattori.

Yhtälö (kk.128) voidaan toteuttaa suoraan tietokoneessa. Kuitenkin sama operaatio voidaan toteuttaa  $f(x, y)$ :n ja seuraan operaattorin konvoluutiona

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{kk.129})$$

Kuten jaksossa Diskreetit yhtälöt todettiin, kiertovirhe diskreetissä konvoluutioprosessissa vältetään täydentämällä  $f(x, y)$  ja  $p(x, y)$ . Kun  $f_e(x, y)$  on jo valmiiksi täydennetty, niin vastavasti  $p_e(x, y)$  on

$$p_e(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & 0 \leq x \leq 2 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & 3 \leq x \leq M-1 \quad \text{tai} \quad 3 \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (\text{kk.130})$$

Jos  $f(x, y)$ :n koko on  $A \times B$ , valitaan  $M \geq A + 3 - 1$  ja  $N \geq B + 3 - 1$ , koska  $p(x, y)$ :n koko on  $3 \times 3$ .

Täydennetty funktion konvoluutio on

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) p_e(x - m, y - n) \quad (\text{kk.131})$$

joka on yhtäpitävä yhtälön (kk.23) kanssa. Käyttäen samanlaista menetelmää kuin jaksossa Diskreetit yhtälöt, voidaan pehmennys kriteerin yhtälö kirjoittaa matriisimuotoon. Ensiksi muodostetaan lohko-kiertomatriisi

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_{M-1} & C_{M-2} & \cdots & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_{M-1} & \cdots & C_2 \\ C_2 & C_1 & C_0 & \cdots & C_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M-1} & C_{M-2} & C_{M-3} & \cdots & C_0 \end{bmatrix} \quad (\text{kk.132})$$

jossa jokainen alimatriisi  $C_j$  on  $N \times N$  kiertomatriisi, joka on muodostettu  $p_e(x, y)$ :n  $j$ :nnestä rivistä

$$C_j = \begin{bmatrix} p_e(j, 0) & p_e(j, N-1) & \cdots & p_e(j, 1) \\ p_e(j, 1) & p_e(j, 0) & \cdots & p_e(j, 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_e(j, N-1) & p_e(j, N-2) & \cdots & p_e(j, 0) \end{bmatrix} \quad (\text{kk.133})$$

Koska  $C$  on lohko-kiertomatriisi, se diagonalisoidaan jaksossa Lohko-kiertomatriisi määritellyllä matriisilla  $W$

$$E = W^{-1}CW \quad (\text{kk.134})$$

jossa  $E$  lävistämatriisi, jonka alkiot ovat

$$E(k, i) = \begin{cases} P\left(\left[\frac{k}{N}\right], k \bmod N\right) & \text{kun } i = k \\ 0 & \text{kun } i \neq k \end{cases} \quad (\text{kk.135})$$

kuten yhtälössä (kk.65). Tässä tapauksessa  $P(u, v)$  on  $p_e(x, y)$ :n 2-ulotteinen Fourier-muunnos. Kuten yhtälöissä (kk.63) ja (kk.65) niin myös yhtälö (kk.135) oletetaan skaalatun tekijällä  $MN$ .

Edellä kuvattu konvoluutio on ekvivalentti yhtälön (kk.128) kanssa jolloin yhtälön (kk.127) pehmenyskriteeri saa saman muodon kuin yhtälössä (kk.125)

$$\text{minimoi} \{ f^T C^T C f \} \quad (\text{kk.136})$$

jossa  $f$  on  $MN$ -ulotteinen vektori ja  $C$ :n koko on  $MN \times MN$ . Oletetaan  $Q = C$  ja kun  $\|Qf\|^2 = (Qf)^T (Qf) = f^T Q^T Q f$ , tämä kriteeri voidaan saattaa muotoon

$$\text{minimoi} \|Qf\|^2 \quad (\text{kk.137})$$

joka on sama muoto kuin jaksossa Rajoitettu korjaaminen. Itse asiassa jos vaaditaan, että rajoitus  $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|n\|^2$  täyttyy, optimiratkaisu on yhtälön (kk.76) mukaan kun  $Q = C$

$$\hat{f} = (H^T H + \gamma C^T C)^{-1} H^T g \quad (\text{kk.138})$$

Käyttäen yhtälöitä (kk.47), (kk.48) ja (kk.134), voidaan yhtälö (kk.138) kirjoittaa muotoon

$$\hat{f} = (WD^* DW^{-1} + \gamma WE^* EW^{-1})^{-1} WD^* W^{-1} g \quad (\text{kk.139})$$

Kertomalla yhtälön molemmat puolet  $W^{-1}$ :llä ja suorittamalla sievennys, yhtälö (kk.139) yksinkertaistuu muotoon

$$W^{-1} \hat{f} = (D^* D + \gamma E^* E)^{-1} D^* W^{-1} g \quad (\text{kk.140})$$

Sulkujen sisällä olevan matriisin alkiot ovat lävistäjällä ja käyttämällä jaksossa Diagonalisoinnin vaikutus muokkautumismalliin kehitettyä menetelmää, yhtälön (kk.140) alkiot voidaan kirjoittaa muotoon

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v) \quad (\text{kk.141})$$

jossa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$  ja  $M = N$ . Nähdään, että yhtälö (kk.141) muistuttaa parametrissa Wiener suodatinta. Pääasiallinen ero yhtälöiden (kk.132) ja (kk.141) välillä on, että jälkimmäinen yhtälö ei tarvitse muita täsmällisiä tietoja tilastollisista parametreista kuin arvion kohinan keskiarvosta ja varianssista.

Yhtälön (kk.76) yleinen muoto vaatii, että  $\gamma$  säädetään täyttämään rajoitus  $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|n\|^2$ . Tällöin yhtälön (kk.141) ratkaisu voi olla optimaalinen vain, kun  $\gamma$  täyttää tämän vaatimuksen. Tämä parametri voidaan laskea iteratiivisella menetelmällä. Määritellään jäännösvektori

$$r = g - H\hat{f} \quad (\text{kk.142})$$

Sijoittamalla yhtälö (kk.139)  $\hat{f}$  :n tilalle, saadaan

$$r = g - H(H^T H + \gamma C^T C)^{-1} H^T g \quad (\text{kk.143})$$

Yhtälö (kk.143) osoittaa, että  $r$  on  $\gamma$ :n funktio. Lisäksi voidaan osoittaa, että

$$\phi(\gamma) = r^T r = \|r\|^2 \quad (\text{kk.144})$$

on monotonisesti kasvava  $\gamma$ :n funktio. Se mitä halutaan tehdä, on säätää  $\gamma$  niini, että

$$\|r\|^2 = \|n\|^2 = \pm a \quad (\text{kk.145})$$

jossa  $a$  on tarkkuustekijä. Selvästi, jos  $\|r\|^2 = \|n\|^2$ , rajoitus  $\|g - H\hat{f}\|^2 = \|n\|^2$  on tiukasti olemassa yhtälön (kk.142) mielessä.

Koska  $\phi(\gamma)$  on monotoninen, ratkaisemalla  $\gamma$ , joka täyttää yhtälön (kk.140) ehdon ei ole vaikeaa. Eräs yksinkertainen lähestymistapa on

1. määritellään  $\gamma$ :lle alkuarvo
2. lasketaan  $\hat{f}$  ja  $\|r\|^2$
3. lopetetaan, jos yhtälö (kk.145) täyttyy ja muutoin palataan kohtaan 2. sen jälkeen kun  $\gamma$ :n arvoa on kasvatettu jos  $\|r\|^2 < \|n\|^2 - a$  tai vähennetty jos  $\|r\|^2 > \|n\|^2 + a$ .

Myös muita menetelmiä kuten Newton – Raphson algoritmia voidaan käyttää nopeuttamaan konvergoitumista. Näiden menetelmien toteus vaatii jotakin tietoa  $\|n\|^2$ :sta.  $\eta(x, y)$ :n varianssi on

$$\sigma_\eta^2 = E\left\{\left[\eta_e(x, y) - \bar{\eta}_e\right]^2\right\} = E\left[\eta_e^2(x, y)\right] - \bar{\eta}_e^2 \quad (\text{kk.146})$$

jossa

$$\bar{\eta}_e = \frac{1}{(M-1)(N-1)} \sum_x \sum_y \eta_e(x, y) \quad (\text{kk.147})$$

on  $\eta_e(x, y)$ :n keskiarvo. Jos näytekkeskiarvoa käytetään aproksimoimaan  $\eta_e^2(x, y)$ :n odotusarvoa, yhtälö (kk.146) muuttuu muotoon

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{(M-1)(N-1)} \sum_x \sum_y \eta_e^2(x, y) - \bar{\eta}_e^2 \quad (\text{kk.148})$$

Summaustermien mukaan tarkoittaa  $\eta_e^2(x, y)$ :n kaikkien termien neliöimistä ja summaamista, kun  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$  ja  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Tämä käsittely on yksinkertaisesti tulo  $n^T n$ , määritelmän mukaan on  $\|n\|^2$ . Tällöin yhtälö (kk.148) yksinkertaistuu muotoon

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\|n\|^2}{(M-1)(N-1)} - \bar{\eta}_e^2 \quad (\text{kk.149})$$

tai

$$\|n\|^2 = (M-1)(N-1)(\sigma_{\eta}^2 + \bar{\eta}_e^2) \quad (\text{kk.150})$$

Tämän yhtälön tärkeys on siinä, että se mahdollistaa rajoitustermien kohinan keskiarvon ja varianssin laskemisen. Ellei näitä tunneta, ne joudutaan käytännössä usein joko arvioimaan tai mittaamaan.

Rajoitettu pienimmän neliön menetelmä voidaan vetää yhteen seuraavaksi algoritmiksi

Vaihe 1

Valitaan  $\gamma$ lle alkuarvo ja määrätään  $\|n\|^2$ :lle likiarvo käyttäen yhtälöä (kk.150)

Vaihe 2

Lasketaan  $\hat{F}(u,v)$  käyttäen yhtälöä (kk.141). Lasketaan  $\hat{f}$  ottamalla käänteinen Fourier-muunnos  $\hat{F}(u,v)$ :stä.

Vaihe 3

Muodostetaan jäännösvektori  $r$  yhtälön (kk.142) mukaan ja lasketaan  $\phi(\gamma) = r^T r = \|r\|^2$ .

Vaihe 4

Vähennetään tai lisätään  $\gamma$ :aa.

- $\phi(\gamma) < \|n\|^2 - a$ . Lisätään  $\gamma$ n arvoa edellä olevan tai jonkin muun algoritmin mukaan.
- $\phi(\gamma) > \|n\|^2 + a$ . Vähennetään  $\gamma$ :aa jollakin sopivalla algoritmilla.

Vaihe 5

Palataan vaiheeseen 2 ja jatketaan kunnes vaihe 6 toteutuu.

Vaihe 6

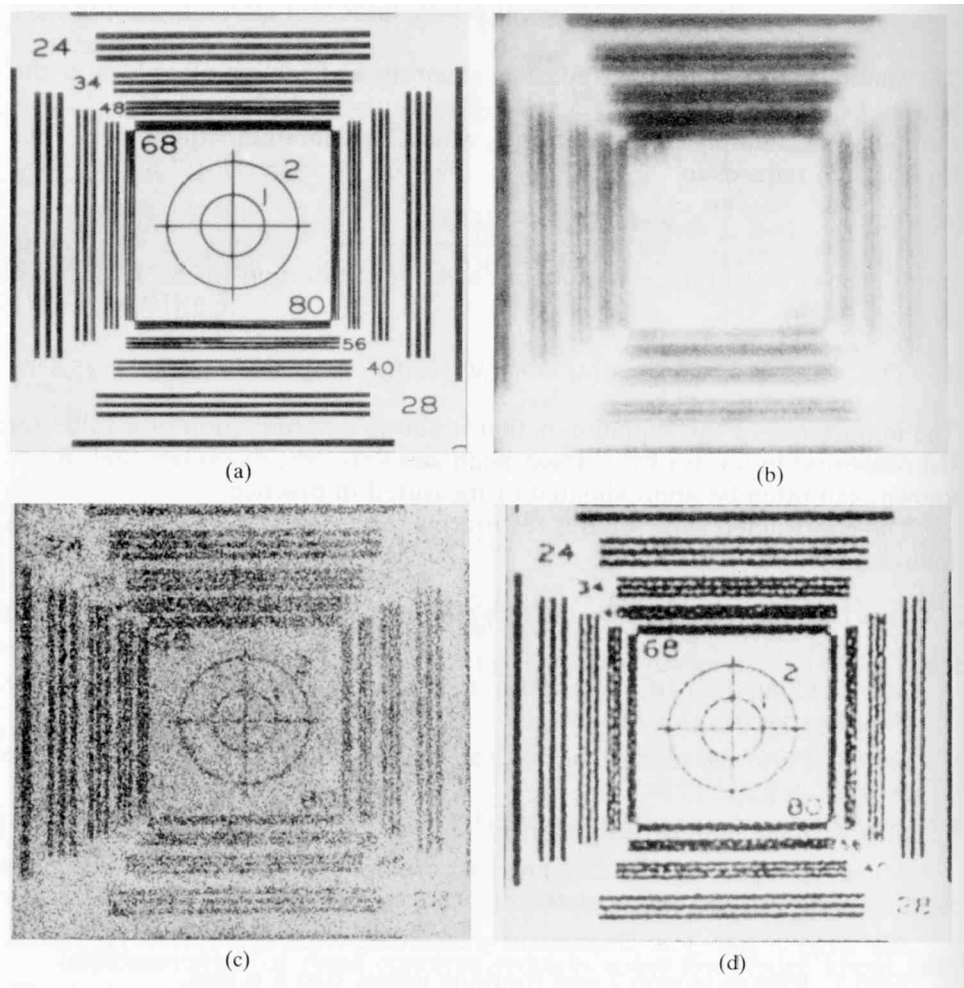
$\phi(\gamma) = \|n\|^2 \pm a$ , jossa  $a$  määrää tarkkuuden, jolla ehdon halutaan toteutuvan. Kun ehto täyttyy, pysäytetään iterointiprosessi. Nyt  $\hat{f}$  edustaa korjattua kuvaa.

### Esimerkki

Kuva kk.6 (b) on saatu konvolvoimalla Gaussin muotoinen pisteen leviämisfunktio

$$h(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2400}}$$

alkuperäisen kuvan kk.6 (a) kanssa ja lisäämällä kohinaa, joka on tasajakautunut välillä  $[0, 0.5]$ . Kuvassa kk.6 (c) on tulos tapauksessa  $\gamma = 0$  (käänteinen suodatus). Tulos on selvästi epätydyttävä, koska kohina hallitsee korjattua kuvaa. Kuvassa kk.6 (d) on tulos, kun on käytetty edellä kuvattua algoritmia sellaisen  $\gamma$ n määrittämiseksi, joka toteuttaa rajoitusehdon. Välillä  $[0, 0.5]$  tasajakautuneen kohinan keskiarvoa ja varianssia käytiin  $\|n\|^2$ :n laskemiseen



Kuva kk.6 Alkuperäinen kuva (a), pehmeä ja kohinainen kuva (b), käänteisellä suodatuksella korjattu kuva (c) ja rajoitetulla pienimmän neliön menetelmällä korjattu kuva (d).

ja tarkkuustekijä valittiin niin, että  $a = 0,025\|n\|^2$ . Parannus rajoitetulla menetelmällä verrattuna suoraan käänteiseen suodatukseen on selvästi nähtävissä.

## UUOROVAIKUTTEINEN KORJAAMINEN

Tähän asti on keskitytty tiukasti analyttisiin kuvan korjausmenetelmiin. Monissa tapauksissa käytännöllinen lähestymistapa on käyttää hyväksi ihmisen intuitiota yhdistettynä tietokoneen monipuolisuuteen korjata kuvaa vuorovaikutteisesti. Tässä tapauksessa havainnoitsija kontrolloi korjausprosessia ja säätää saatavilla olevia parametrejä jotta lopputulos olisi paras mahdollinen aiottuun tarkoitukseen.

Eräs yksinkertaisimmista kuvan korruptoitumista, joka soveltuu hyvin vuorovaikutteiseen korjaamiseen, on 2-ulotteisen sinimuotoisen häiriön (koherentti kohina) summautuminen kuvaan. Oletetaan, että  $\eta(x, y)$  edustaa sinimuotoista häiriötä, jonka amplitudi on  $A$  ja taajuuskomponentit ( $u_0$  ja  $v_0$ ), jolloin

$$\eta(x, y) = A \sin(u_0 x + v_0 y) \quad (\text{kk.151})$$

Yhtälön (kk.151) suora sijoittaminen yhtälöön (km.9) johtaa  $\eta(x, y)$ :n Fourier-muunnokseen



$$N(u, v) = \frac{-jA}{2} \left[ \delta\left(u - \frac{u_0}{2\pi}, v - \frac{v_0}{2\pi}\right) - \delta\left(u + \frac{u_0}{2\pi}, v + \frac{v_0}{2\pi}\right) \right] \quad (\text{kk.152})$$

Toisin sanoen 2-ulotteisen sinifunktion Fourier-muunnos on kaksi impulssia, joiden voimakkuudet ovat  $-A/2$  ja  $A/2$ . Impulssit sijaitsevat taajuustason koordinaateissa  $(u_0/2\pi, v_0/2\pi)$  ja  $(-u_0/2\pi, -v_0/2\pi)$ . Tässä tapauksessa muunnos käsittää vain imaginaarikomponentteja.

Kun ainoa muokkaava tekijä on kohina, yhtälöstä (kk.66) seuraa, että

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v) \quad (\text{kk.153})$$

Kuvan  $g(x, y)$  Fourier-muunnos  $G(u, v)$  sisältää kuvan  $f(x, y)$  ja kohinan  $n(x, y)$  Fourier-muunnosten  $F(u, v)$  ja  $N(u, v)$  summan. Jos  $A$  on riittävän suuri, kaksi  $N(u, v)$ :n aiheuttamaa impulssia näkyy kirkkaina pisteinä erityisesti, jos ne sijaitsevat suhteellisen kaukana origosta. Tällöin yleensä kuvan  $f(x, y)$  taajuuskomponenttien amplitudit ovat pieniä.

Jos  $\eta(x, y)$  tunnetaan täysin, alkuperäinen kuva voidaan palauttaa poistamalla häiriö kuvasta  $g(x, y)$ . Koska tämä tilanne on harvinainen, käyttökelpoinen ratkaisu on tunnistaa impulssien sijainti visuaalisesti ja käyttää tämän jälkeen kaistaestosuodatinta näissä pisteissä.

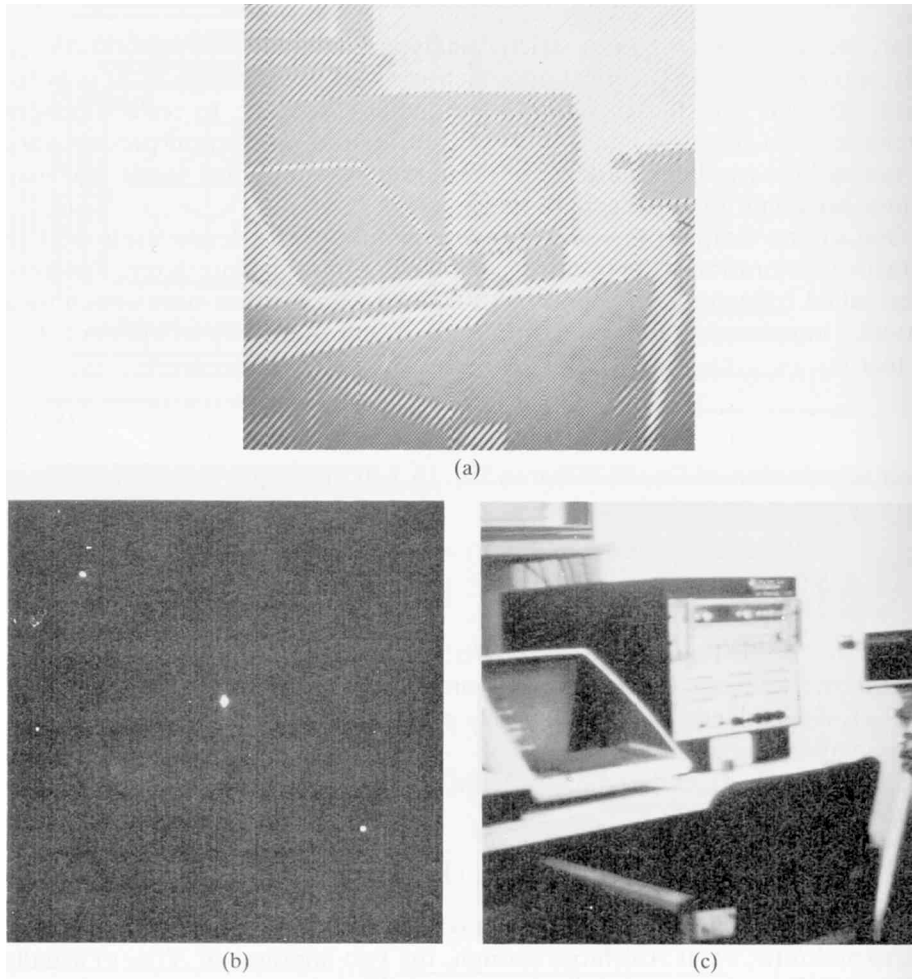
### Esimerkki

Kuvassa kk.7 (a) on sinimuotoisen häiriön pilaama kuva. Häiriön muoto on yhtälön (kk.151) mukainen. Tämän kuvan Fourier-muunnos on kuvassa kk.7 (b). Kuvassa näkyy selvästi sinimuotoisen häiriön aiheuttama symmetrinen impulssipari. Kuva kk.(c) on saatu sijoittamalla kaksi 1-säteistä kaistaestosuodatinta häiriöimpulssien paikkoihin. Tämän jälkeen suoritettiin käänteinen Fourier-muunnos. Kaikkiin käytännön sovellutuksiin korjattu kuva on häiriötön.

Edellä esitetyn kaltaista selvästi erottuvaa ja helposti määriteltävää häiriökuviota harvoin esiintyy käytännössä. Merkittäviä esimerkkejä ovat kuvat, jotka on saatu sähkö-optisilla skannereilla, jollaisia käytetään esimerkiksi avaruusluotaimissa. Näissä tapauksissa yleinen ongelma on häiriö, joka johtuu pienitasoisten signaalien vuotamisesta muista elektronisista piireistä. Seurauksena on kuva jossa skannerin ulostuloon on summautunut 2-ulotteinen jaksollinen rakenne.

Kuvassa kk.8 (a) on esimerkki tämän tyyppisestä jaksollisesta häiriöstä. Siinä on Mariner 6:n ottama kuva Marsin pinnasta. Häiriö on hyvin saman tyyppinen kuin kuvassa kk.7 (a), mutta häiriökuvio on huomattavasti heikompi ja näin ollen vaikeampi tunnistaa taajuustasossa.

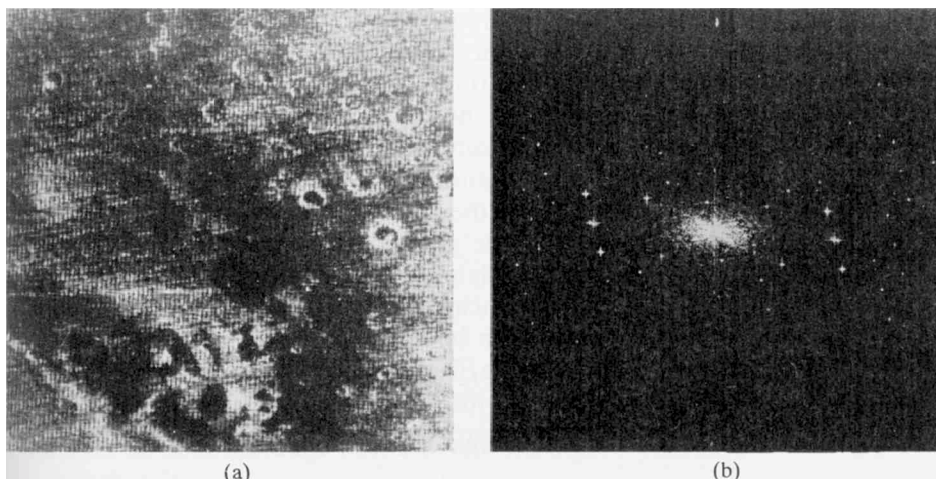
Kuvassa kk.8 (b) on kuvan kk.8 (a) Fourier-muunnos. Tähtimäiset komponentit ovat seurausta häiriöstä. Lisäksi kuvassa esiintyy useita impulssipareja, joka on seurausta useammasta kuin yhdestä häiriötaajuudesta. Kun kuvassa on useita häiriökomponentteja, edellä kuvattu menetelmä ei ole aina hyväksyttävää, sillä se voi poistaa kuvasta liikaa informaatiota. Lisäksi nämä häiriöt eivät tavallisesti sisällä vain yhtä taajuuskomponenttia. Päinvastoin niillä on



Kuva kk.7 Sinimuo-toisen häiriön pilaama kuva (a), häiriöllisen kuva Fourier-muunnos, jossa näkyy häiriön aiheuttamat kaksi kirkasta impulssia (b) ja kuva kais-tanestosuodatuksen jälkeen.

taipumus sisältää laajempi spektri, joka sisältää informaatiota häiriölähteestä. Näitä spektrejä on usein vaikea erottaa normaalista muunnoksen taustasta.

Menetelmä, joka on huomattu toimivaksi prosessoitaessa häiriöllisiä kuvia, koostuu kahdesta osasta. Ensiksi eristetään häiriön pääkomponentit ja sen jälkeen poistetaan häiriöllisestä kuvasta muuttuva, painotettu osa häiriöstä. Vaikka menetelmä johdetaan yksittäisessä tapauksessa, niin perus lähestymistapa on yleinen ja sitä voidaan soveltaa muihin tapauksiin, joissa ongelmana on moninkertainen jaksollinen häiriö.



Kuva kk.8 Mari-ner 6:n Marsin pinnasta ottama kuva (a) ja sen Fourier-muunnos (b). Kuvassa esiintyy jaksollinen häiriö, mikä aiheuttaa vastaa-vat piikit spek-triin.

Ensimmäinen askel on eristää häiriökuvion päätaajuuskomponentit. Tämä voidaan tehdä sijoittamalla kaistapäästösuodatin  $H(u, v)$  jokaiselle häiriösignaalin spektrikomponentille. Jos  $H(u, v)$  on rakennettu päästämään vain häiriösignaalin komponentit, häiriön Fourier-muunnos on

$$P(u, v) = H(u, v)G(u, v) \quad (\text{kk.154})$$

jossa  $G(u, v)$  on korruptoituneen kuvan  $g(u, v)$  Fourier-muunnos.  $N \times N$  kuvan tapauksessa  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Siirtofunktion  $H(u, v)$  rakentaminen vaatii merkittävää paattelyä siitä, mikä on häiriöpiikki ja mikä ei. Tästä syystä kaistapäästösuodatin yleensä muodostetaan interaktiivisesti tarkkailemalla spektriä  $G(u, v)$  näytöllä. Sen jälkeen, kun suodatin on valittu, vastaava kuvio spatiaalitasossa saadaan yhtälöstä

$$p(x, y) = F^{-1}\{H(u, v)G(u, v)\} \quad (\text{kk.155})$$

Koska häiriöllinen kuva on muodostunut lisäämällä  $f(x, y)$ :hyn häiriösignaali, jos  $p(x, y)$  on täysin tunnettu, häiriökuvion vähentäminen  $g(x, y)$ :stä  $f(x, y)$ :n määrittämiseksi on yksinkertaista. Ongelmana on, että tämä suodatusmenetelmä johtaa ainoastaan todellisen häiriökuvion likiarvoon. Niiden komponenttien vaikutus, jotka eivät sisältyneet  $p(x, y)$ :n likiarvoon, voidaan minimoida vähentämällä  $g(x, y)$ :stä painotettu osa  $p(x, y)$ :stä  $\hat{f}(x, y)$ :n likiarvon  $\hat{f}(x, y)$  määrittämiseksi

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)p(x, y) \quad (\text{kk.156})$$

jossa  $w(x, y)$  on ns. painotus tai modulaatiofunktio. Menetelmän ytimenä on valita sellainen  $w(x, y)$ , että tulos on optimoitu jollakin merkityksellisellä tavalla. Eräs lähestymistapa  $w(x, y)$ :n valitsemiseksi on minimoida  $\hat{f}(x, y)$ :n varianssi jokaisen pisteen  $(x, y)$  määritellyssä naapurustossa.

Tarkastellaan pisteen  $(x, y)$  naapurustoa, jonka koko on  $(2X + 1) \times (2Y + 1)$ .  $\hat{f}(x, y)$ :n paikallinen varianssi koordinaateissa  $(x, y)$  on

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2X + 1)(2Y + 1)} \sum_{m=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y [\hat{f}(x + m, y + n) - \bar{\hat{f}}(x, y)]^2 \quad (\text{kk.157})$$

jossa  $\bar{\hat{f}}(x, y)$  on  $\hat{f}(x, y)$ :n keskiarvo tässä naapurustossa.

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2X + 1)(2Y + 1)} \sum_{m=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y \hat{f}(x + m, y + n) \quad (\text{kk.158})$$

Kuvan reunalla tai lähellä sitä olevat pisteet voidaan käsitellä huomioimalla osittainen naapurusto. Sijoittamalla yhtälö (kk.158) yhtälöön (kk.159), saadaan

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2X+1)(2Y+1)} \sum_{m=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y \left\{ [g(x+m, y+n) - w(x+m, y+n)p(x+m, y+n)] - [\bar{g}(x, y) - \overline{w(x, y)p(x, y)}] \right\}^2 \quad (\text{kk.159})$$

Oletetaan, että  $w(x, y)$  on vakio koko naapurustossa, jolloin saadaan likiarvo

$$w(x+m, y+n) = w(x, y) \quad (\text{kk.160})$$

kun  $-X \leq m \leq X$  ja  $-Y \leq n \leq Y$ . Lisäksi naapurustossa

$$\overline{w(x, y)p(x, y)} = w(x, y)\bar{p}(x, y) \quad (\text{kk.161})$$

Käyttämällä tätä likiarvoa yhtälö (kk.159) saa muodon

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2X+1)(2Y+1)} \sum_{m=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y \left\{ [g(x+m, y+n) - w(x, y)p(x+m, y+n)] - [\bar{g}(x, y) - w(x, y)\bar{p}(x, y)] \right\}^2 \quad (\text{kk.162})$$

Funktion  $\sigma^2(x, y)$  minimoimiseksi ratkaistaan

$$\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0 \quad (\text{kk.163})$$

$w(x, y)$  suhteen. Tulos on

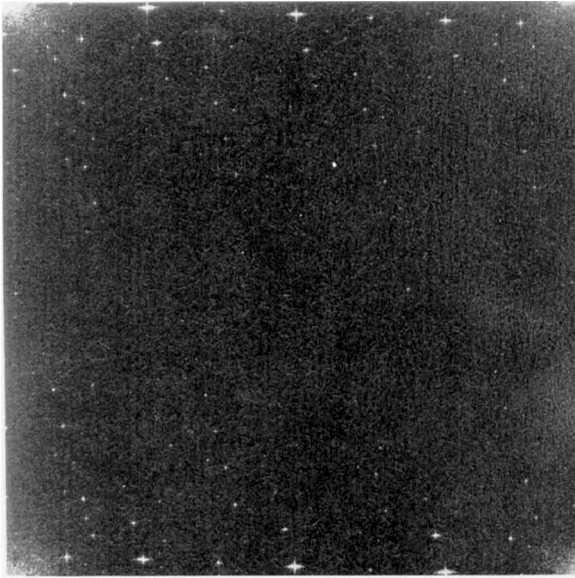
$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)p(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{p}(x, y)}{p^2(x, y) - \bar{p}^2(x, y)} \quad (\text{kk.164})$$

Korjatun kuvan  $\hat{f}(x, y)$  määrittämiseksi lasketaan  $w(x, y)$  yhtälöstä (kk.164) ja sen jälkeen käytetään yhtälöä (kk.157). Kun  $w(x, y)$  oletetaan vakioksi ympäristössä, yhtälön laskenta kaikilla  $x$ :n ja  $y$ :n arvoilla ei ole välttämätöntä. Sen sijaan  $w(x, y)$  lasketaan kerran limittymättömässä ympäristössä ja tätä arvoa käytetään koko tässä naapurustossa.

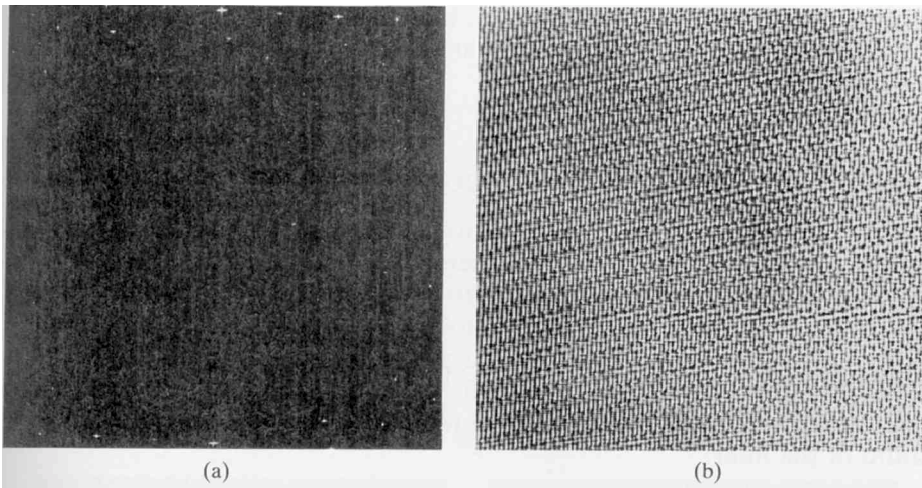
### Esimerkki

Kuvat kk.9:stä kk.11:stä näyttävät, miten edellä kuvattua tekniikkaa käytetään kuvaan kk.8 (a). Tässä tapauksessa  $N = 512$  ja ympäristön koko on  $X = Y = 15$ . Kuvassa kk.9 on häiriöllisen kuvan Fourier-muunnos. Tässä tapauksessa origoa ei ole siirretty kuvan keskelle. Kuvassa kk.10 (a) on  $P(u, v)$ :n spektri, jossa vain kohinapiikit ovat näkyvissä. Kuvassa kk.10 (b) on häiriökuvio  $p(x, y)$ , joka on saatu ottamalla käänteinen Fourier-muunnos  $P(u, v)$ :stä. Häiriökuvio on samankaltainen kuin kohina kuvassa kk.8 (a). Lopuksi kuvassa kk.11 on prosessoitu kuva, joka on saatu soveltamalla yhtälöä (kk.56). Jaksollinen häiriö on kaikkiin käytännön tarkoituksiin poistettu. Jäljellä on vain pistemäinen jaksoton kohina. Tämä voidaan poistaa muilla keinoin kuten mediaanisuodatuksella.





Kuva kk.9 Kuvan kk.8 (a) Fourier-spektri ilman origon siirtoa kuvan keskelle



Kuva kk.10  $P(u, v)$ :n Fourier-spektri (a) ja vastaava interferenssikuvio  $p(x, y)$



Kuva kk.11 Prosessoitu kuva

## KORJAAMINEN SPATIAALITASOSSA

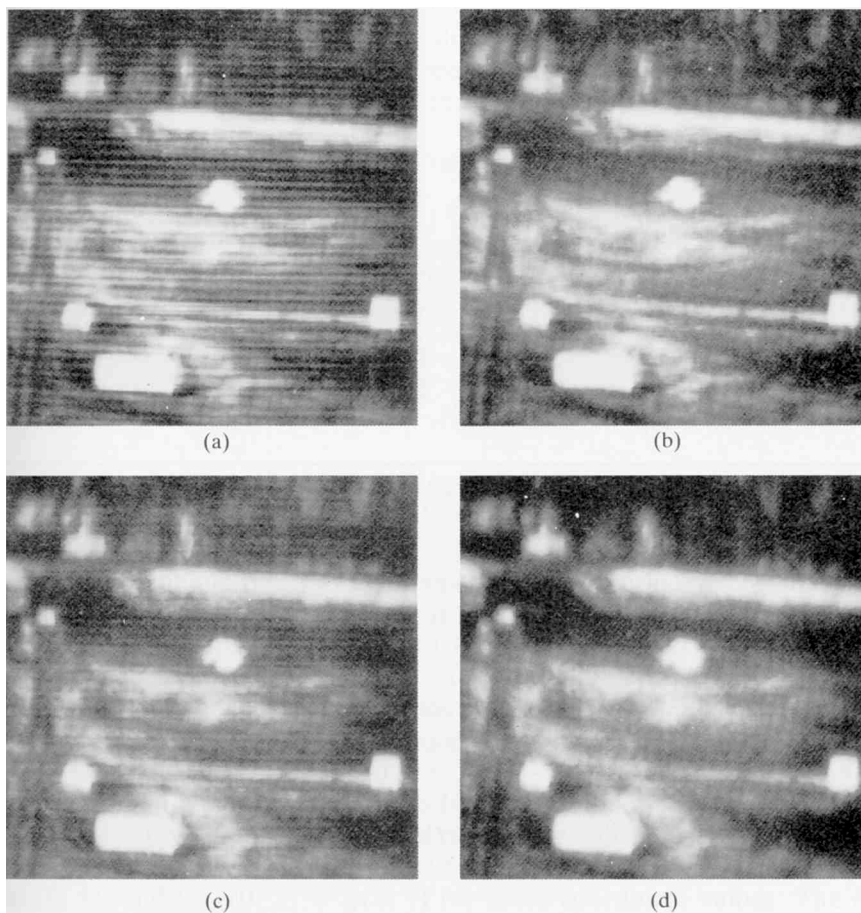
Sen jälkeen kun sopiva taajuustason korjaussuodatin on saatu määriteltä jollakin aikaisemmin käsitellyllä tavalla, ratkaisun toteutus spatiaalitasossa konvoluutiomaskilla on usein toivottavaa. Kuten aikaisemmin on näytetty, konvoluutiomaskin kertoimet voidaan johtaa suoraan taajuustason suodattimen siirtofunktiosta käyttäen yhtälöä (kp.69). Kappaleessa ”Spatiaalisen maskin muodostaminen taajuustason vaatimuksista” käsiteltiin kuvan parantamista, mutta menetelmä voidaan laajentaa käsittämään myös kuvan korjaamisen. Ainoa ero tavoitteissa on suodattimien luonteessa.

### Esimerkki

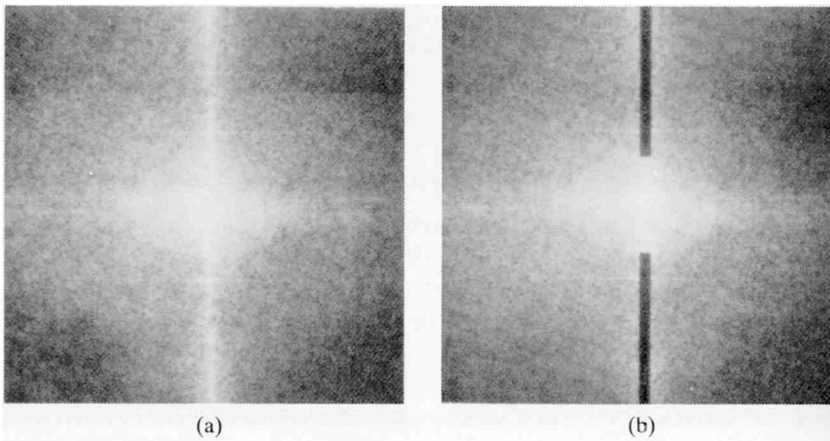
Kuvassa kk.12 (a) on infrapunakuva sotilaallisista kohteista kentällä. Kuva on korruptoitunut skannerista johtuvasta interferenssistä, joka näkyy kuvan lähes vaakasuuntaisena raidottumisena. Häiriön jaksollisesta luonteesta johtuen häiriö muodostaa energiapurskeen pystyakselille kuvan Fourier-muunnoksessa kuvassa kk.13 (a).

Yksinkertainen menetelmä häiriön poistamiseksi on käyttää kapeaa kaistanestosuodatinta  $H(u, v)$ . Suodatin vaimentaa Fourier-muunnoksen komponentteja pystyakselilla ja kertoo muut taajuuskomponentit ykkösellä. Kuvassa kk.13 (b) on tällainen suodatin lisättyä spektrikuvaan. Tumma raita kuvaa vaimennettuja taajuuskomponentteja.

Kuvassa kk.12 (b) on tulos kapean kaistanestosuodattimen käytöstä käänteisen Fourier-muunnoksen jälkeen. Tulos osoittaa, että kaikkiin käytännön tarkoituksiin häiriö on poissa.



Kuva kk.12 Häiriöllinen infrapunakuva (a), taajuustason kapealla kaistanestosuodattimella korjattu kuva (b),  $9 \times 9$  maskilla korjattu kuva (c) ja maskia käytetty toisen kerran (d)



Kuva kk.13 Kuva kk.12 (a) Fourier spektri (a) ja kapea kaistanestosuodatin lisätty spektrikuvaan (b)

Kuvassa kk.12 (c) oleva kuva on saatu käyttämällä  $9 \times 9$  konvoluutiomaskia alkuperäiseen häiriölliseen kuvaan. Tämän maskin kertoimet on johdettu kapeasta kaistanestosuodattimesta yhtälön (kp.69) avulla. Tämä maski on vain likiarvo taajuustason suodattimesta jolloin jonkin verran vaakasuuntaista häiriötä on edelleen jäljellä prosessoidussa kuvassa. Kun maskia sovelletaan kuvaan toiseen kertaan, häiriö vaimenee edelleen kuitenkin kuvan terävyyden kustannuksella kuten nähdään kuvassa kk. (d).

## GEOMETRIAMUUNNOKSET

Tämä luku päätetään esittelevään keskusteluun geometrisista muunnoksista kuvan korjaamisessa. Aikaisemmin käsitellyistä tekniikoista poiketen geometrinen muunnos yleensä muokkaa kuvan pikselien spatiaalisia suhteita. Geometrisia muunnoksia sanotaan usein kumilevymuunnoksiksi, koska ne voidaan nähdä prosessina, jossa kuva tulostetaan kumilevylle ja sen jälkeen levyä venytellään jonkin etukäteen määritellyn säännön mukaan.

Digitaalisen kuvankäsittelyn kannalta geometriamuunnos koostuu kahdesta perusoperaatiosta. Ensiksi spatiaalisesta muunnoksesta, joka määrittelee kuvan pikselien uudelleen ryhmittelyn ja toiseksi harmaatason interpoloinnista, joka määrittelee spatiaalisesti muunnettujen pikselien harmaatason. Seuraavassa keskustellaan näihin menetelmiin liittyvistä ideoista kuvan korjaamisessa.

## SPATIAALINEN MUUNNOS

Oletetaan, että kuva  $f$ , jonka pikselien koordinaatit ovat  $(x, y)$ , säröytyy geometrisesti kuvaksi  $g$ , jonka pikselien koordinaatit ovat  $(\hat{x}, \hat{y})$ . Tämä muunnos voidaan kuvata operaattoreilla

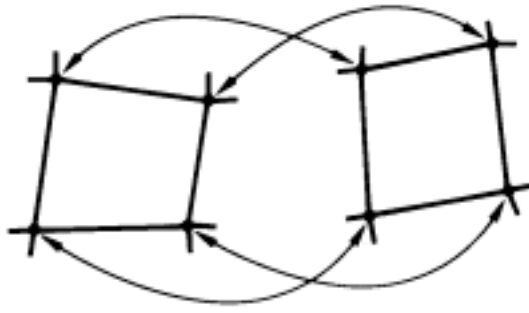
$$\hat{x} = r(x, y) \quad (\text{kk.165})$$

ja

$$\hat{y} = s(x, y) \quad (\text{kk.166})$$

jossa  $r(x, y)$  ja  $s(x, y)$  edustavat spatiaalisia muunnoksia, jotka tuottavat geometrisesti säröytyneen kuvan  $g(\hat{x}, \hat{y})$ . Esimerkiksi, jos  $r(x, y) = x/2$  ja  $s(x, y) = y/2$ , säröytyminen on yksinkertaisesti kuvan koon pieneneminen kosta  $f(x, y)$  puoleen kumpaankin spatiaaliseen suuntaan.





Kuva kk.14 Kahden kuvasegmentin vastaavat sidontapisteet

Jos  $r(x, y)$  ja  $s(x, y)$  tunnetaan analyyttisesti, kuvan  $f(x, y)$  palauttaminen säröytyneestä kuvasta  $g(\hat{x}, \hat{y})$  käänteisellä muunnoksella on teoreettisesti mahdollista. Käytännössä kuitenkin yksien funktioitten  $r(x, y)$  ja  $s(x, y)$  muotoileminen analyyttisesti niin, että se kuvaisi säröytymisprosessia koko kuvassa ei ole mahdollista. Tämän ongelma ratkaistaan useimmin muotoilemalla pikselien uudelleen sijoitus käyttämällä sidontapisteitä, jotka ovat pikselien alijoukko joiden sijainti säröytyneessä ja säröttömässä kuvassa tunnetaan tarkkaan.

Kuvassa kk.14 on nelisivuinen alue säröytyneessä ja vastaavassa korjatussa kuvassa. Nelisivun kulmat ovat vastaavat sidontapisteet. Oletetaan, että geometrinen säröytyminen nelisivuisen alueen sisällä voidaan mallintaabilineaarisella yhtälöparilla niin, että

$$r(x, y) = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4 \quad (\text{kk.167})$$

ja

$$s(x, y) = c_5x + c_6y + c_7xy + c_8 \quad (\text{kk.168})$$

Silloin yhtälöistä (kk.165) ja (kk.166) seuraa

$$\hat{x} = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4 \quad (\text{kk.169})$$

ja

$$\hat{y} = c_5x + c_6y + c_7xy + c_8 \quad (\text{kk.170})$$

Koska on kaikkiaan kahdeksan tunnettua sidontapistettä. näistä yhtälöistä voidaan helposti ratkaista kahdeksan kerrointa  $c_i$ , jossa  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Kertoimet muodostavat mallin, jota käytetään muuntamaan kaikki pikselit sen nelisivun sisällä, jonka sidontapisteitä käytettiin kertoimien määrittämisessä. Yleisesti tarvitaan riittävästi sidontapisteitä joukon nelisivujen muodostamiseen, jotta voidaan kattaa koko kuvan ala.

Menetelmä korjatun kuvan muodostamiseksi on suoraviivainen. Esimerkiksi  $f(0,0):n$  muodostamiseksi sijoitetaan  $(x, y) = (0, 0)$  yhtälöihin (kk.169) ja (kk.170) ja lasketaan koordinaattipari  $(\hat{x}, \hat{y})$  näistä yhtälöistä. Tämän jälkeen sijoitetaan  $f(0, 0) = g(\hat{x}, \hat{y})$ , jossa  $\hat{x}$  ja  $\hat{y}$  ovat edellä lasketut koordinaattiarvot. Seuraavaksi sijoitetaan  $(x, y) = (0, 1)$  yhtälöihin (kk.169) ja (kk.170) ja lasketaan toinen koordinaattipari  $(\hat{x}, \hat{y})$  ja sijoitetaan  $f(0, 1) = g(\hat{x}, \hat{y})$  näissä koordinaattiarvoissa. Näin jatketaan pikseli pikseliltä ja rivi riviltä kunnes matriisi, jonka koko ei ylitä kuvan  $g$  kokoa, on käyty läpi. Kuvan käynti läpi sarakkeittain johtaa samaan lopputulokseen. Myös kirjaa pitävä menettely on oleellinen määriteltäessä mitkä pikselit kuuluvat mihinkin nelisivuun, jotta niihin sovelletaan oikeita kertoimia.



## HARMAATASO INTERPOLOINTI

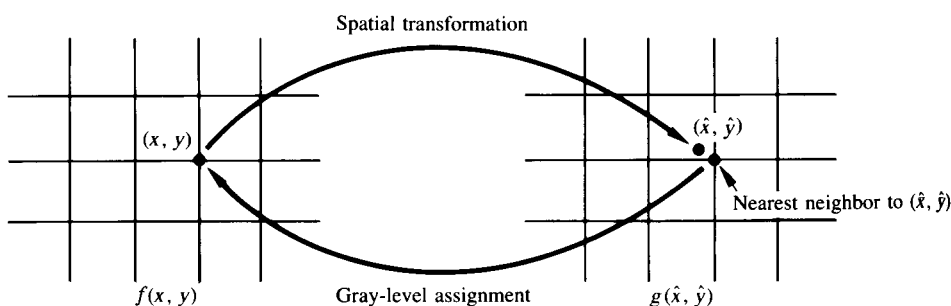
Edellä kuvattu menetelmä, jossa käydään läpi kokonaislukuavo koordinaatit  $(x, y)$  johtaa korjattuun kuvaan  $f(x, y)$ . Kuitenkin riippuen kertoimista  $c_i$ , yhtälöt (kk.169) ja (kk.170) voivat johtaa  $\hat{x}$ :n ja  $\hat{y}$ :n ei kokonaislukuarvoihin. Koska säröytynyt kuva  $g$  on digitaalinen, sen pikselit on määritelty vain kokonaislukuarvo koordinaateissa. Näin ollen ei kokonaislukuarvo  $\hat{x}$ :n ja  $\hat{y}$ :n johtaa kuvauksen  $g$ :n paikkaan, jossa harmaatasoa ei ole määritelty. Päätely siitä mikä harmaatasoarvo tässä pisteessä pitäisi olla, perustuu vain kokonaislukukoordinaattien pikseliarvoihin. Tämän päätelyn suorittamiseen tarkoitettua tekniikkaa sanotaan harmaataso interpoloinniksi.

Yksinkertaisin kaava harmaataso interpoloinniksi perustuu lähimmän naapurin lähestymistapaan. Tätä menetelmää, jota sanotaan myös **nollannen kertaluvun interpoloinniksi**, valotetaan kuvassa kk.15. Tämä kuva osoittaa: (1) kokonaislukukoordinaattien  $(x, y)$  kuvautumisen murtoluku koordinaatteihin  $(\hat{x}, \hat{y})$  käyttäessä yhtälöitä (kk.169) ja (kk.170); (2) lähimmän kokonaislukukoordinaattinaapurin valitseminen  $(\hat{x}, \hat{y})$ :ksi; ja (3) osoittamalla tämän lähimmän naapurin harmaatason pikselille  $(x, y)$ .

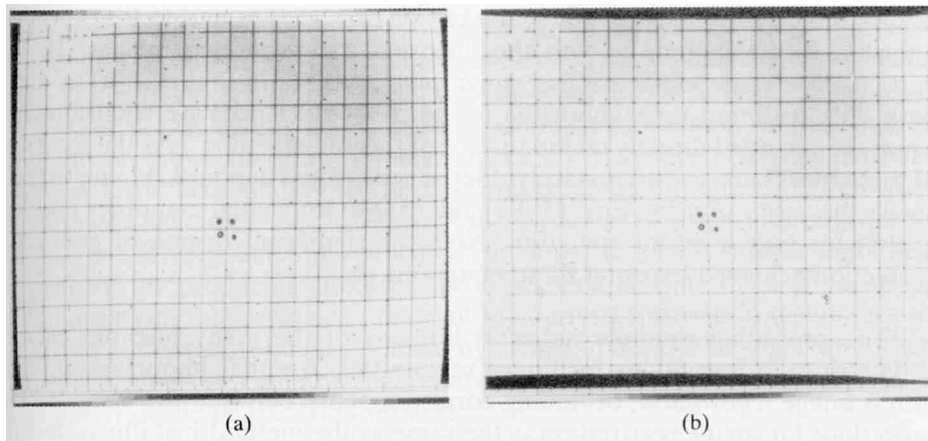
Vaikka lähin naapuri interpolointi on yksinkertainen toteuttaa, menetelmällä on haittapuolia. Tämä voi tuottaa toivomattomia tuloksia kuten suorien reunojen hienopiirteistä vääristymistä. Parempi tulos voidaan saavuttaa käyttämällä hienostuneempi menetelmiä kuten kuutiokonvoluutio interpolointia. Tämä menetelmä sopii  $\sin(x)/x$  tyyppisen pinnan kautta paljon suuremmalle naapurien määrälle (esim. 16) tarkoituksena määrittää kullekin pisteelle parempi likiarvo. Tämä menetelmä on laskennallisesti raskas ja siksi on järkevä kompromissi käyttää bilineaari interpolointia, joka käyttää neljän lähimmän naapurin harmaatasoja. Toisin sanoen ideana on, että jokaisen neljän lähimmän naapurin harmaatasot tunnetaan.  $(\hat{x}, \hat{y})$ :n harmaatasoarvo,  $v(\hat{x}, \hat{y})$ , voidaan tämän jälkeen interpoloida sen naapureista käyttäen yhtälöä

$$v(\hat{x}, \hat{y}) = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{x}\hat{y} + d \quad (\text{kk.171})$$

jossa neljä kerrointa voidaan määrittää helposti neljästä yhtälöstä, jotka voidaan kirjoittaa käyttämällä  $(\hat{x}, \hat{y})$ :n neljää tunnettua naapuria. Kun nämä kertoimet on laskettu, lasketaan  $v(\hat{x}, \hat{y})$  ja sijoitetaan tämä arvo pikselille  $f(x, y)$ . Tätä menettelyä on helppo visualisoida kuvan kk.15 avulla. Erona nollannen kertaluvun interpolointiin on, että  $(\hat{x}, \hat{y})$ :n lähimmän naapurin harmaatason asemesta interpoloidaan pisteen  $(\hat{x}, \hat{y})$  harmaataso ja käytetään sitä pisteen  $(x, y)$  harmaatasona.



Kuva kk.15  
Lähimmän naapurin menetelmään perustuva harmaataso interpolointi.



Kuva kk.16 Säröytynyt kuva (a) ja kuva geometrisen korjauksen jälkeen (b).

### Esimerkki

Edellä kuvattua geometrisen vääristymän korjaustekniikkaa voidaan valottaa soveltamalla menetelmää vääristyneeseen kuvaan. Tällainen vääristynyt kuva on kuvassa kk.16 (a). Kuvassa on ns. tynnyrivääristymä, joka on tyypillistä monille vidikon tyyppisille kameroille. Kuvassa oleva suorakulmainen rasteri on merkittävästi vääristynyt varsinkin kuvan reunoilla. Lisäksi vääristymä ei ole samanlainen koko kuvan alalla ja vääristymä kasvaa epälineaarisesti etäisyyden funktiona kuvan keskipisteestä.

Kuten aikaisemmin todettiin, yhtälöiden (kk.169) ja (kk.170) käyttö vaatii tietoa sidontapisteistä sekä vääristyneessä kuvassa että korjatussa kuvassa. Tässä tapauksessa sidontapisteet ovat kohdistusmerkkejä, jotka näkyvät pieninä pisteinä koko kuvan alalla (kohdistuspisteet ovat pieniä metallisia neliöitä, jotka ovat suoraan kuvaputken pinnassa). Koska näiden pisteiden sijainti on tunnettu tarkasti, ne toimivat ideaalisina sidontapisteinä. Kuvassa kk.16 (b) on tulos yhtälöiden (kk.169) ja (kk.170) soveltamisesta. spatiaaliseen kuvaukseen ja yhtälöä (kk.171) on käytetty harmaatason interpolointiin. Kuvassa on näkyvissä selvä geometrian parantuminen.

Edellä oleva esimerkki osoittaa geometrinen muunnosten mahdollisuuksia kuvan korjaamisessa. Toinen tärkeä sovellutus on kuvan kohdistus tai kahden kuvan välisten vastaavuuksien haku. Menettely kuvan kohdistuksessa on samanlainen kuin geometrisessa korjauksessakin. Kuitenkin paino on muuntaa kuvaa niin, että se vastaa toisen kuvan samaa näkymää mutta katsottuna ehkä toisesta perspektiivistä. Muita sovellutuksia kuvan geometrisille muunnoksille voivat olla näytön vääristymien oikaisu, karttaprojektiot ja kartoitusprojektiot.

Kaksien vastaavien sidontapisteiden määrittäminen kahdessa eri kuvassa voi olla monessa tapauksessa melko vaikea tehtävä. Aina ei ole saatavilla kontrolloituja aikaisemmin määriteltäviä vastinpisteitä. Kun merkkejä ei tunneta etukäteen, sidontapisteet on tavallisesti muodostettu korrelaatiotekniikalla, jossa etsitään kuvista vastaavia ominaisuuksia. Korrelaatiotekniikat kuitenkin kärsivät sellaisista kuvan ominaisuuksista kuin kohina ja kuvan kierto. Tämä johtaa yleensä epätarkkaan vastaavuuteen sidontapisteiden välillä.